

# Métodos de continuación. Teoría y práctica.

Arturo Olvera<sup>1</sup> and Cristóbal Vargas<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Depto. de Matemáticas y Mecánica. IIMAS-UNAM  
Apdo. Postal 20-726. 01000 México, D.F.

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas. CINVESTAV-IPN  
Apdo. Postal 14-740. 07000 México, D.F.

## **Abstract.**

We show in this work the use of the continuation method to calculate periodic solution for a mapping and for a differential equation. The Froeschlé mapping and the Mathieu differential equation were chosen as examples. We discuss the fact that a homotopic methods is a very powerful tool but, unfortunately the automatization of this methods is still far away. A deep knowledge of the specific problem is requiere to take advantage of different procedures in order to obtain the desired solution.

## **Resumen.**

En este trabajo mostramos la manera de utilizar el método de continuación para calcular soluciones periódicas en mapeos y en ecuaciones diferenciales. Para este propósito tomamos como ejemplos el mapeo de Froeschlé y la ecuación diferencial de Mathieu. El el trabajo mostramos que los métodos homotópicos son herramientas muy poderosas pero aún esta lejano el poder automatizar completamente estos procedimientos. Un profundo conocimiento del problema específico es necesario para poder sacar provecho de los diferentes métodos para poder obtener la solución deseada.

## 1. Métodos de continuación.

Uno de los problemas fundamentales en la matemática es la de encontrar ceros de funciones,

$$F(\mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (1.1)$$

Una gran cantidad de veces la función  $F$  es real y de variable real. Pero muchas otras veces  $F$  es una función definida sobre un espacio más general. Por ejemplo, el encontrar funciones armónicas es equivalente a resolver la ecuación de Laplace  $\Delta^2 u = 0$ . En problemas de optimización es típico el querer encontrar ceros de funciones definidas en  $\mathbb{R}^n$ .

Un método muy usual para encontrar estos ceros es el de Newton–Raphson–Kantorovich, de ahora en adelante simplemente nos referiremos a el como el método de Newton, el cual dice:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [DF(\mathbf{x}_n)]^{-1} F(\mathbf{x}_n) \quad .$$

Este sencillo esquema iterativo implica tres hechos fundamentales:

1. La capacidad de evaluar la función  $F$  en cada paso, cosa que no necesariamente es fácil o barata.
2. La existencia de la derivada de  $F$  en cada iteración y que además sea invertible; por último
3. La capacidad de conocer un  $\mathbf{x}_0$ , punto inicial, lo suficientemente cerca de la raíz buscada, para poder asegurar la convergencia del método.

Para adivinar un punto inicial, generalmente se recurre al conocimiento previo o al conocimiento general, del que pueda echar uno mano, acerca del problema específico; es decir a las propiedades que tenga  $F$ . Sin embargo, muchas veces es muy difícil tener una idea de donde empezar: quizás el  $\mathbf{x}_0$  es escudizado ya que la cuenca de atracción del método, para nuestra  $F$ , es muy pequeña o

quizas, porque la evaluación de  $F$  es tan complicada que no es fácil de hacer sondeos.

Desde el siglo pasado, al menos, se sabe que Poincaré enfrentó este problema y lo atacó por medio de lo que llamó el método de continuación. En diferentes épocas, diferentes gentes han encontrado este mismo método y en los últimos tiempos se le ha llamado el método homotópico.

La idea del método de continuación es muy sencilla, consiste en deformar continuamente la función dada en una función conocida, a la cual se le conoce un cero y partiendo de este cero llegar a un cero de nuestra  $F$ . Esto se puede hacer de muchas maneras: por simplicidad consideremos  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se define una nueva función  $H : D \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $D$  es el dominio de  $F$ , de tal manera que

$$H(\mathbf{x}, 0) = F_0(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad H(\mathbf{x}, 1) = F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad .$$

Donde  $F_0$  es una función conocida tal que,  $F_0(\mathbf{x})$  tiene un cero conocido o fácilmente calculable, es decir  $F_0(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Ejemplos de  $H$  pueden ser:

$$\text{a) } \quad H(\mathbf{x}, t) = tF(\mathbf{x}) + (1 - t)F_0(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

$$\text{b) } \quad H(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}) + (t - 1)F(\mathbf{x}_0) \quad (1.3)$$

Partiendo de  $H(\mathbf{x}_0, 0) = 0$ , uno espera que cambiando un poco el valor de  $t$ , digamos de  $t = 0$  a  $t = \Delta t$ , entonces  $H(\mathbf{x}, \Delta t)$  tenga un comportamiento parecido al de  $F_0(\mathbf{x})$  y por tanto el cero de  $H(\mathbf{x}, \Delta t)$  esté cerca del cero de  $F_0(\mathbf{x})$ , es decir, de  $\mathbf{x}_0$ . Entonces, uno puede utilizar  $\mathbf{x}_0$  como un punto inicial para encontrar la raíz de  $H(\mathbf{x}, \Delta t) = 0$ .

Si podemos encontrar esta raíz, llamémosla  $\mathbf{x}_1$ , se tiene  $H(\mathbf{x}_1, \Delta t) = 0$ . Ahora incrementamos el valor de  $t$ , digamos a  $t = 2\Delta t$  y buscamos la raíz de la nueva ecuación, definida por  $H(\mathbf{x}, 2\Delta t) = 0$ . Usando  $\mathbf{x}_1$  como nuestra primera aproximación podemos encontrar la nueva raíz que satisfaga  $H(\mathbf{x}_2, 2\Delta t) = 0$  y continuamos este proceso.

Finalmente, cuando  $t = 1$  tendremos  $H(\mathbf{x}, 1) = F(\mathbf{x}) = 0$  y la ecuación tendrá un comportamiento muy parecido a  $H(\mathbf{x}, (n - 1)\Delta t) = 0$ , la cual tiene la solución  $\mathbf{x}_{n-1}$  que se calculó anteriormente. Así, usando  $\mathbf{x}_{n-1}$  como aproximación inicial obtenemos  $\mathbf{x}_n$ , raíz de  $H(\mathbf{x}, n\Delta t) = F(\mathbf{x}) = 0$ .

Obviamente, hay muchas condiciones que hay que comprobar a cada paso para asegurar que el método de Newton converge para cada  $\Delta t$  y además que es posible tener  $\mathbf{x}(t)$ , es decir una curva de raíces.

Existen condiciones bajo las cuales es posible asegurar estos hechos [Re]. Desafortunadamente, muchas de estas condiciones son muy restrictivas y no permiten calcular los ceros cuando la curva que se busca,  $\mathbf{x}(t)$ , presenta singularidades; siendo muchas veces que el problema de interés tiene estas dificultades de manera inherente, las cuales en general reflejan los fenómenos físicos más interesantes.

Supongamos de momento, que nuestra curva es lo suficientemente suave como para llevar a cabo todos los pasos matemáticos que deseamos. Como queremos que:

$$H(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, 1] \quad , \quad (1.4)$$

se tendría una función constante de una variable,  $\phi(t) = 0$  para  $t \in [0, 1]$ , así:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \partial_1 H(\mathbf{x}(t), t) \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) + \partial_2 H(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad .$$

Si el jacobiano de  $F$  no es singular, entonces:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = -[\partial_1 H(\mathbf{x}(t), t)]^{-1} \partial_2 H(\mathbf{x}(t), t) \quad \forall t \in [0, 1] \quad , \quad (1.5)$$

con condición inicial  $H(\mathbf{x}(0), 0) = 0$ .

Esto no es más que una ecuación diferencial que nos permite encontrar  $\mathbf{x}(t)$ , la curva solución de  $H(\mathbf{x}(t), t) = 0$ , como se aprecia en la figura (1.1).

En principio, podemos utilizar cualquier método para resolver ecuaciones diferenciales y habríamos acabado con nuestro trabajo. Lamentablemente, encontrar esta solución tampoco es fácil y hay que recurrir a métodos numéricos.

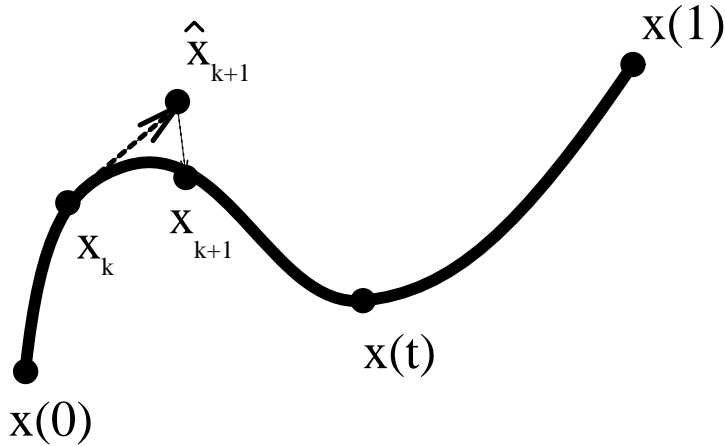


Figura (1.1): Curva solución  $\mathbf{x}(t)$  en el espacio fase. Los puntos  $\mathbf{x}_k$  y  $\mathbf{x}_{k+1}$  son los puntos calculados por el método de Newton y el punto  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  es la predicción obtenida por Euler.

Uno muy sencillo es el método de Euler: tomando  $\mathbf{x}_k$  un punto sobre nuestra curva al tiempo  $t_k$ , el esquema luciría de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \Delta t [\partial_1 H(\mathbf{x}_k, t_k)]^{-1} \partial_2 H(\mathbf{x}_k, t_k) \quad . \quad (1.6)$$

El método nos **predice** un  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ , el cual no es más que una aproximación al cero que estamos buscando (ver figura (1.1)), pero por estar cercano a este, podemos darlo como una aproximación inicial a nuestro método de Newton.

Así que empezando el método de Newton con  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ , **corregimos** este vector para encontrar una mejor aproximación a la raíz  $\mathbf{x}_{k+1}$ . De esta manera se tiene un método Predictor–Corrector, para ir siguiendo la curva de ceros.

Obviamente, el método falla si el jacobiano se anula en algún punto, para resolver este problema existen varias soluciones, una de ellas es la propuesta por Keller [Ke] llamada el método de la pseudo–longitud de arco. En este se introduce una nueva variable que hace que nuestro sistema aumente en una dimensión, pero que permite que la curva que seguimos no tenga un jacobiano que se anule en el punto en cuestión. Una idea geométrica está representada en la figura (1.2).

Al introducir una nueva variable  $\sigma$ , la curva original que presentaba el punto problemático  $A$ , se convierte en una nueva curva. Donde observamos que el

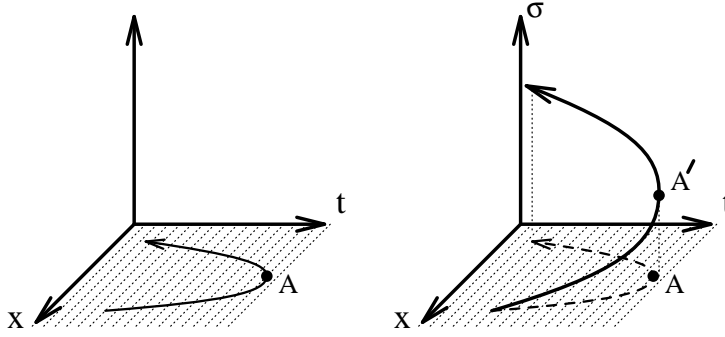


Figura (1.2): La figura de la izquierda muestra el punto de retorno  $A$  en el plano  $(\mathbf{x}, t)$ . En la figura de la derecha, el punto  $A'$  ya no es punto de retorno respecto a la pseudo-longitud de arco  $\sigma$

punto correspondiente  $A'$  ya no presenta la dificultad anterior.

Las nuevas ecuaciones del sistema aumentado lucirán como sigue:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}(t), t) &= 0 \quad , \\ N(\mathbf{x}, t, \sigma) &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde

$$N(\mathbf{x}, t, \sigma) = \theta \|\mathbf{x}(\sigma) - \mathbf{x}(\sigma_0)\|^2 + (1 - \theta) |t(\sigma) - t(\sigma_0)|^2 - |\sigma - \sigma_0|^2 = 0 \quad ,$$

siendo  $\theta$  un escalar, el cual generalmente se toma como un factor para hacer énfasis entre  $\mathbf{x}$  o la variable  $t$ .

Los puntos de retorno no son los únicos problemas que podemos encontrar al utilizar un método homotópico simple. Es posible tener también, en el punto singular, una fenomenología más rica y su clasificación dependerá de estudiar a orden superior el comportamiento de las derivadas del jacobiano. Una referencia sobre estos temas es [Ha, Li].

## 2. Teoría y práctica.

En la sección anterior se mencionó, brevemente, la teoría de los métodos homotópicos para determinar los ceros de una función, dependiente de un parámetro. Algunos problemas, tales como los puntos de retorno, fueron considerados y se describió una metodología formulada por Keller que permite continuar la rama de soluciones a través de estos puntos singulares.

Como es de esperarse, este tipo de metodología tiene un costo, el cual no es evidente a primera vista y que puede reflejarse de manera diferente según sea el problema que se estudia. En esta sección analizaremos dos problemas distintos y estudiaremos las dificultades que aparecen al intentar usar la metodología descrita en la primera parte y la forma heurística como se resolvieron tales problemas. El primer problema corresponde a calcular soluciones periódicas en un mapeo de dimensión cuatro que depende de tres parámetros. El segundo problema es el estudio del comportamiento de las soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu.

## 2.1 Órbitas periódicas del mapeo de Froeschlé.

El mapeo de Froeschlé es un modelo muy simplificado de la dinámica de galaxias con simetría cilíndrica [Fr], en los últimos años se le ha utilizado para estudiar propiedades de la dinámica de sistemas mecánicos hamiltonianos, con tres grados de libertad [Ko]. El dominio del mapeo es el producto de dos cilindros  $(S^1 \times \mathbb{R}) \times (S^1 \times \mathbb{R})$ . Las coordenadas en este espacio son  $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  donde  $x_1, x_2$  son coordenadas angulares y  $y_1, y_2$  son reales. El mapeo está descrito de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{y}_i = y_i - \frac{K_i}{2\pi} \sin(2\pi x_i) - \frac{\lambda}{2\pi} \sin(2\pi(x_1 + x_2)) , \\ \bar{x}_i = x_i + \bar{y}_i \pmod{1} , \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

donde  $K_1, K_2$  y  $\lambda$  son parámetros del problema. Existe un gran interés por conocer las soluciones periódicas de este mapeo, a las cuales se les denomina órbitas periódicas y cada una de estas órbitas está etiquetada por dos números racionales que forman el llamado vector de rotación  $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$ . Una solución periódica con ese vector de rotación debe cumplir la siguiente relación:

$$H(\mathbf{x}, \lambda) = f^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x} - (p, 0, q, 0) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Debido a que este mapeo es del tipo reversible, y que se puede escribir en

término de involuciones, es posible definir ocho planos de simetría de dimensión dos. La importancia de estos planos de simetría radica en el hecho de que podemos encontrar soluciones de la ecuación (2.2), cuyas coordenadas forman un punto en alguno de estos planos. De esta manera se reduce el problema de encontrar ceros de nuestra función de  $\mathbb{R}^4$  a encontrar los ceros de una función de  $\mathbb{R}^2$  [OV1].

De esta forma, podemos formular el problema de encontrar soluciones periódicas de (2.1) como el problema de encontrar los ceros de la función (2.2), donde  $\mathbf{x}$  pertenece a un plano de dimensión dos. Aunque el mapeo depende de tres parámetros, podemos proponer que dos de ellos estén en función del tercer parámetro, por ejemplo  $K_1$  y  $K_2$  pueden ser tomados como función de  $\lambda$ .

Cuando  $\lambda = 0$ , podemos determinar sin problema cualquier solución periódica con número de rotación  $(\frac{p}{n}, \frac{q}{n})$  [OS]. El problema es continuar la solución cuando  $\lambda$  es diferente de cero, para eso podemos utilizar alguno de los métodos homotópicos descritos en la primera parte para resolver la ecuación (2.2).

El primer problema que nos encontramos es que no es directo calcular el jacobiano ni la derivada en  $\lambda$  de la ecuación (2.2). Esto es debido a que la función no se conoce explícitamente, ya que en este caso se tiene la composición del mapeo (2.1) aplicado  $n$ -veces consigo mismo. De esta forma, el jacobiano de (2.2) es el producto de  $n$  Jacobianos del mapeo (2.1), cada uno de ellos evaluado en cada una de las imágenes de la órbita. En este caso, calcular numéricamente la derivada respecto al parámetro  $\lambda$  es más conveniente, lo cual hacemos por medio de diferencias finitas centrales y utilizamos el esquema descrito por la ecuación (1.6) o algún otro análogo a él.

Una mejora del método es considerar un método alternativo a Newton, como es el método de Broyden [Ko,Br]. De esta forma se reduce el tiempo de cómputo al evitar calcular en cada paso el jacobiano de la ecuación (2.2).



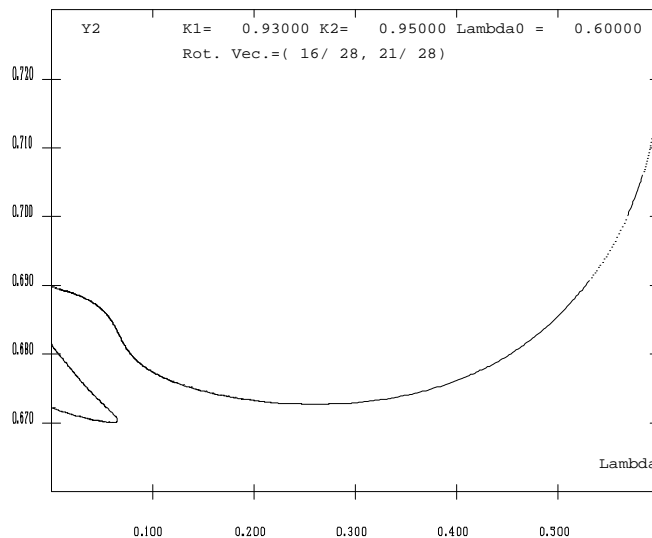


Figura (2.1): Rama que representa soluciones periódicas con número de rotación  $(\frac{16}{28}, \frac{21}{28})$ . Cada punto de la curva es una solución de la ecuación (2.2) para cada valor del  $\lambda$ .

Como resultado obtenemos las curvas presentadas en la figura (2.1), donde cada punto de la rama corresponde a la pareja de valores  $(\lambda, y_2(\lambda))$ . Podemos notar que una rama solución corresponde a una gráfica de  $\lambda$ , que se extiende de  $\lambda = 0$  a  $\lambda = 0.6$ . Sin embargo la segunda rama ya no corresponde a la gráfica de una función pues tiene un punto de retorno. Para calcular esta rama fué necesario utilizar el método de la pseudo-longitud de arco.

Sin embargo, el hecho de que (1.7) ya no sea singular en el punto de retorno no impide que este nuevo jacobiano tenga nuevos puntos singulares, los cuales ya no pueden ser asociados a puntos de retorno. Consideremos el caso de una rama con dos puntos de retorno, como vemos en la gráfica izquierda de la figura (2.2), donde los puntos A y B muestran los puntos de retorno. La gráfica derecha de la figura (2.2) nos muestra el valor del determinante del inverso del Jacobiano. La gráfica inferior representa el caso del método homotópico simple, donde apreciamos que en los puntos A y B el determinante tiende a infinito [OV2]. La gráfica superior nos muestra el caso sobredimensionado, donde es claro que han desaparecido los puntos singulares en A y en B, sin embargo surgen dos nuevos puntos singulares, marcados por las letras C y D. Aunque los puntos singulares impiden

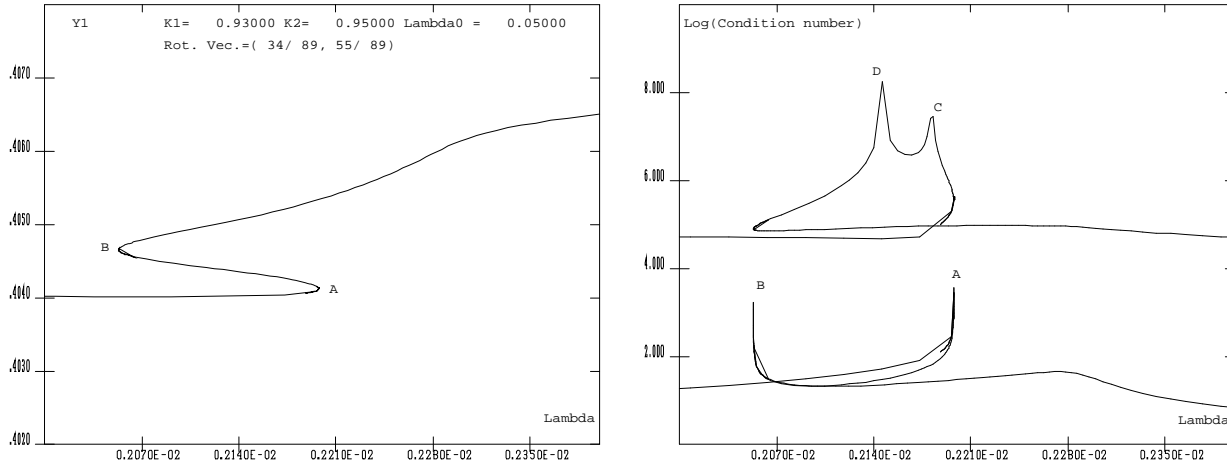


Figura (2.2): La figura de la izquierda representa la rama solución de órbitas periódicas con número de rotación  $(\frac{34}{89}, \frac{55}{89})$ . Las letras A y B representan los puntos de retorno. La figura de la derecha muestra el valor del logaritmo del determinante del jacobiano: la curva inferior corresponde al jacobiano de la ecuación (2.2); la curva superior corresponde al jacobiano de la ecuación (2.3).

continuar la rama por medio del método homotópico, existe la posibilidad de cambiar la posición de dichos puntos singulares ya que su colocación depende del valor de los parámetros  $\mathbf{x}_0$ ,  $\lambda_0$  y  $\sigma_0$ . Como estos parámetros son arbitrarios, podemos buscar un nuevo valor de ellos tal que coloquen la singularidad en una posición que nos permita continuar la rama, a este proceso le hemos llamado reparametrización. Otra posible acción que podemos realizar para evitar estos nuevos puntos singulares es regresar al método homotópico simple y continuar la rama hasta la proximidad del siguiente punto de retorno, donde volvemos a retomar el esquema de la pseudolongitud de arco.

El tener un procedimiento más exacto para la predicción de la nueva raíz de la función, aumenta la posibilidad de que el método de Newton sea convergente y además reduce el número de interacciones para lograr la precisión deseada. Un manera simple de obtener esta mejora es el utilizar un método multipaso en la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = - (H_x) H_\lambda \quad .$$

Al implementar el método de Adams–Bashforth a orden cuatro mejoramos significativamente la precisión en la predicción de la nueva raíz, lo cual permite aumentar el tamaño del paso en  $\lambda$ , para así continuar con mayor rapidez la rama.

Una última observación sobre el método de continuación, es que algunas veces la cuenca de atracción del método de Newton se reduce de tamaño, lo cual obliga a acortar el tamaño de paso de  $\lambda$  significativamente. Al continuar la rama superior de la figura (2.1) para valores de  $\lambda$  mayores a 0.1, el paso de  $\lambda$  tiene que irse reduciendo para asegurar la convergencia del método de Newton. Los experimentos numéricos nos permiten asociar la norma del máximo valor propio del jacobiano de la ecuación (2.2) con el tamaño de la cuenca de atracción del método de Newton, si uno aumenta el otro disminuye. Por otro lado, cuando sobredimensionamos el sistema, al implementar el método de pseudo-longitud de arco, se encontró que la norma del máximo valor propio aumenta en varios órdenes de magnitud respecto a la norma del máximo valor propio del método homotópico simple.

La conclusión que obtenemos es el utilizar en lo posible el método simple de continuación con la implementación de Adam-Bashforth hasta cierto orden (por ejemplo 4). Solamente en los entornos de los puntos de retorno es indispensable considerar un método sobredimensionado.

## **2.2 Ecuación de Mathieu y soluciones periódicas.**

Algunas veces no es fácil resolver la ecuación diferencial (1.5), por tanto se tienen que buscar procedimientos alternos para resolver directamente la ecuación (1.4) en forma directa y debemos adaptarnos a las situaciones que el problema nos permita trabajar.

En este ejemplo tomamos el caso de la ecuación de Mathieu, la cual proviene

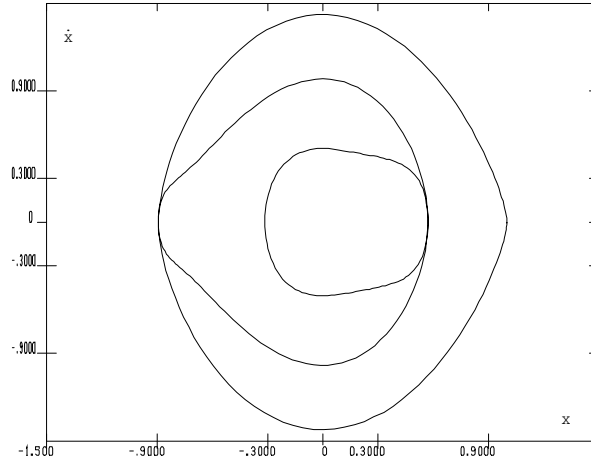


Figura (2.3): Espacio fase de la ecuación de Mathieu, donde se muestra una órbita periódica con período  $2\pi P$  y que da  $N$  vueltas al origen, en este caso  $P = 5$  y  $N = 3$ .

de un modelo muy simplificado del movimiento de la luna alrededor de la tierra [St]. Esta ecuación la escribimos en forma de un sistema de 2 ecuaciones de primer orden acopladas:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha + 2\beta \cos(2t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros.

Este sistema es lineal pero con coeficientes periódicos. La teoría de Floquet nos muestra que dado un valor predeterminado del período, existen valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para los cuales se tiene una solución con ese período y este resultado es independiente de las condiciones iniciales [Ma]. Al fijar el período, estas soluciones están caracterizadas por cumplir la relación  $\sqrt{\alpha} = 2\frac{N}{P}$ , con  $N, P \in \mathbb{N}$ , cuando el parámetro  $\beta = 0$ . Esto nos permite tener soluciones  $2\pi P$  periódicas, y si observamos el espacio fase, la órbita debe girar  $N$  veces antes de cerrar, tal como lo vemos en la figura (2.3).

Cuando  $\beta$  no es cero, el problema de determinar la relación que existe entre  $\alpha$  y  $\beta$ , tal que esta pareja de valores determine soluciones  $2\pi P$  periódicas y que giren  $N$  veces alrededor del origen es un problema muy complicado. Se puede mostrar que esta relación determina una curva suave en el espacio  $(\alpha, \beta)$  y que

esta curva se puede representar como la gráfica de una función en  $\beta$  [Ma].

Podemos plantear un procedimiento numérico para encontrar soluciones  $2\pi P$  periódicas y que giren  $N$  veces. Dada una pareja de valores  $(\alpha, \beta)$ , integramos la ecuación diferencial de  $t = 0$  a  $t = 2\pi P$ , medimos la distancia entre el punto inicial  $(x_0, y_0)$  y el final  $(x_f, y_f)$ . De esta forma obtenemos una función del espacio  $(\alpha, \beta)$  a los reales. Como siempre existe una solución para todo valor de  $\beta$ , podemos fijar  $\beta$  y variar  $\alpha$  hasta lograr que la solución cierre, es decir, que esta función tome el valor cero.

Este procedimiento es similar a encontrar ceros de la función  $f(\alpha(\beta), \beta) = 0$ . Por lo tanto podemos utilizar las técnicas de continuación para determinar la rama correspondiente a las soluciones periódicas. Esta rama comienza a partir del punto

$$\left( \alpha = 4 \frac{N^2}{P^2}, \beta = 0 \right).$$

El primer obstáculo es el calcular la derivada de la función  $f(\alpha, \beta)$  respecto a  $\alpha$ . Como no conocemos explícitamente la función, el único recurso es el cálculo numérico de la derivada por diferencias centrales. Desafortunadamente, cuando el valor de  $P$  es grande, el tiempo de integración aumenta enormemente y resulta costoso en tiempo de cómputo el cálculo de estas derivadas además de la posible pérdida de precisión. De igual forma, calcular la derivada de  $f(\alpha, \beta)$  respecto al parametro  $\beta$  es difícil y caro en tiempo de máquina. Así que resulta poco adecuado hacer la predicción del siguiente valor de  $\alpha$  por medio de la ecuación

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^{-1} \left( \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) \Delta \beta \quad . \quad (2.4)$$

¿Existe otra alternativa? Partiendo del hecho de que la curva  $\alpha = \alpha(\beta)$  es suave y que para valores pequeños de  $\beta$ , el cálculo de las derivadas numéricas es factible, podemos calcular  $m + 1$  puntos resolviendo (2.4). Tomando el método de Interpolación de Lagrange, usamos los  $m + 1$  puntos calculados previamente,

y obtenemos un polinomio en la variable  $\beta$  de orden  $m$  que pasa por los  $m + 1$  puntos ya mencionados. Usando este polinomio se puede hacer la predicción del siguiente punto, el cual será refinado por un método tipo Newton.

En el ejemplo que mostramos, utilizamos un polinomio interpolador de orden nueve y como corrector se utilizó el método de la secante para encontrar el siguiente cero de la función. Experimentalmente se vió, que al aumentar el grado del polinomio se reduce el número de iteraciones en el método de la secante, ahorrando mucho tiempo de cómputo. Sin embargo al introducir polinomio de grado demasiado alto, el costo de calcularlo aumenta mucho y pueden surgir inestabilidades.

Este método, tiene la virtud de optimizar el tiempo de cómputo y asegurar en lo posible la convergencia. En la figura (2.4) se aprecian las ramas correspondientes a órbitas periódicas donde los valores de  $P$  y  $N$  cumplen las siguientes propiedades:  $P, N \in \mathbb{N}$  y  $0 < P < N < 10$  son primos relativos. Es notable observar que el cálculo se puede realizar hasta valores muy grandes del parámetro  $\beta$  a pesar que estas ramas de soluciones periódicas se encuentran entre las regiones de inestabilidad llamadas lenguas de Arnold, donde la región donde existen las soluciones periódicas se estrecha exponencialmente a medida que  $\beta$  incrementa su valor [Go].

### 3. Bibliografía.

- [Br] Broyden, C. G. *Math. Comp.* **19**, (1965) 577.
- [Fr] Froeschlé, C. *Astrophys. Space Sci.*, **14**, (1971) 110.
- [Go] Gómez, N. Soluciones Periódicas de la Ecuación de Mathieu. Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. (1994).
- [Ha] Hale, J. y Koçak, H. Dynamics and Bifurcation Springer Verlag, Ney York (1991).
- [Ke] Keller, H. B. Lectures of Numerical Methods in Bifurcation Problems, Springer-Verlag, New York (1987).

- [Ko] Kook, H. y Meiss J. Periodic Orbits for Reversible, Symplectic Mapping, *Physica 36D*, (1989) 65.
- [Li] Light, W. Advances in Numerical Analysis, Vol. I, Clarendon Press, Oxford (1991).
- [Ma] Magnus, W. y Winkler, S. Hill's Equation, Dover, New York, (1979).
- [OV] Olvera, A. and Simó, C. *Physica D*, v. 26 (1987) 181.
- [OV1] Olvera, A. and Vargas, C. *Physica D*, v.72 (1994) 351.
- [OV2] Olvera, A. and Vargas, C. Study of the continuation methods for periodic orbits of the Froeschlé map. , Neural, Parallel & Scientific Computations. (Aceptado).
- [Re] Rheinboldt, W. Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations, J. Wiley, New York (1970).
- [St] Sternberg, S. Celestial Mechanics, Benjamin Inc., New York (1969).

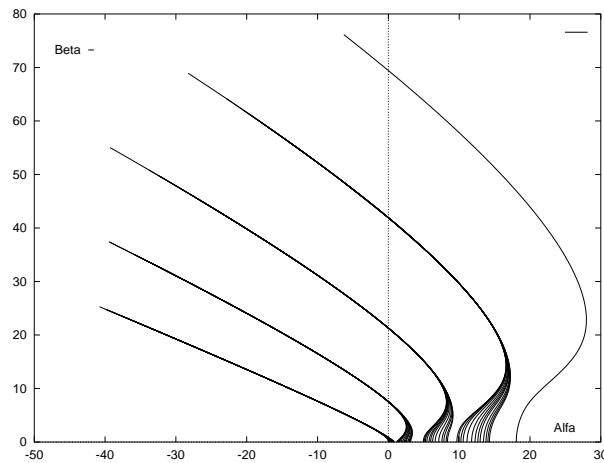


Figura (2.4): Ramas de órbitas periódicas en el espacio de parámetros  $(\alpha, \beta)$ . Cada una de las curvas representa un continuo de soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu.