

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROYECTO UNIVERSITARIO DE FENÓMENOS NOLINEALES Y
MECÁNICA

N L S

UNA INTRODUCCIÓN A LA ECUACIÓN
NO LINEAL DE SCHRÖDINGER

J. Fujioka
INSTITUTO DE FÍSICA

Autor:

Jorge Fujioka Rojas

Título:

NLS: Una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger

Editores:

Comité Editorial FENOMECE

Gustavo Cruz

Clara Garza

Jorge Ize

Ma. del Carmen Jorge

Arturo Vargas

Apoyo Editorial:

Lilia Martínez

María Ochoa

Diseño de Portada:

Ana Pérez

Ramiro Chávez

SERIE FENOMECC

Uno de los propósitos del *Proyecto Universitario de Fenómenos Nolineales y Mecánica*, **FENOMECC**, es fomentar el estudio de los Fenómenos Nolineales que aparecen en distintas disciplinas científicas, al impulsar investigaciones conjuntas de especialistas en estas áreas que comparten un lenguaje común.

Con este fin, la **SERIE FENOMECC** publica textos monográficos sobre un amplio espectro de temas no lineales de gran interés en esas disciplinas. Estos textos están orientados tanto a investigadores como a estudiantes que quieran iniciarse en la manera de pensar nolineal.

Algunos de estos textos fueron escritos por visitantes de **FENOMECC** y son el resultado de transcribir, a petición del Comité Editorial, las ponencias realizadas durante su visita.

Todos los textos de esta **SERIE** son cuidadosamente seleccionados por el Comité Editorial y sometidos a un proceso de arbitraje.

La publicación se realiza gracias al apoyo que la Coordinación de la Investigación Científica de la UNAM brinda a **FENOMECC** e, indirectamente, al Proyecto de Grupo G25427-E, Matemáticas Nolineales en la Física y la Ingeniería, del CONACyT.

COMITÉ EDITORIAL

Dr. Gustavo Cruz Dra. Clara Garza Dr. Jorge Ize
Dra. Ma. del Carmen Jorge Dr. Arturo Vargas

INFORMES

Alma Rosa Rodríguez

Tel/Fax: 56 22 35 64

fenomec@mym.iimas.unam.mx

<http://mym.iimas.unam.mx>

Contenido

<i>Prólogo</i>	7
<i>Agradecimientos</i>	9
1. Una triple conjunción	11
2. Telecomunicaciones	21
3. Deducción de la ecuación NLS	31
4. Secantes y tangentes hiperbólicas	43
5. Los cuatro casos posibles	51
6. El caso dispersivo y el efecto GVD	57
7. El caso no lineal y el efecto SPM	69
8. GVD + SPM	75
9. Resolución numérica de la ecuación NLS	79
 Apéndices	
A. Breve historia de la ecuación KdV	89
B. El método IST más de cerca	103
C. IST y NLS	119
Bibliografía	127
Índice alfabético	131

Prólogo

La ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) es una de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales más importantes e interesantes de la física-matemática.

Rica en propiedades matemáticas, la ecuación NLS aparece en numerosas ramas de la física (hidrodinámica, acústica, bajas temperaturas, física de plasmas) y tiene un papel central en la tecnología de telecomunicaciones mediante fibras ópticas.

Actualmente se estudian multitud de procesos físicos que se describen mediante variantes y generalizaciones de la ecuación NLS y esta variedad de temas ofrece múltiples oportunidades a quienes se interesen en la física-matemática o las matemáticas aplicadas. Sin embargo, todas estas oportunidades desaparecen para aquellos físicos y matemáticos que durante su paso por la universidad no llegaron a conocer esta interesante ecuación.

Estas pequeñas notas están dirigidas a estudiantes de ciencias que busquen una introducción inteligible a este tema. A diferencia de otros textos sumamente especializados, estas notas no presuponen que el lector sea un experto en óptica o en teoría de la dispersión. Las matemáticas que un físico estudia en licenciatura, más un curso introductorio de electromagnetismo, son los únicos requisitos deseables para leer estas notas.

El autor espera que este trabajo pueda ser de alguna utilidad para todos aquellos que se interesen por la física-matemática y las matemáticas aplicadas.

J. Fujioka

México, D.F., octubre de 2003.

Agradecimientos

Mi agradecimiento más profundo a mis padres, familiares y maestros:

Michihiko Fujioka,
Esperanza Rojas,
Rogelio Rojas,

Héctor Riveros,
Octavio Novaro,
John Grepe,

y a una persona muy especial, cuya identidad indicaré de la manera siguiente:

De los presagios: *la nube*.
De árboles: *el terebinto*.
De piedras: *la calcedonia*.

De entre los signos: *el viento*.
De epifanías: *una rosa*.
De emblemas: *una medalla*.

De los tesoros: *la perla*.
De lugares: *el desierto*.
De órganos: *el corazón*.

Capítulo 1

Una triple conjunción

Estas notas van a girar en torno a una ecuación, un concepto y una tecnología multimillonaria. La ecuación es *la ecuación no lineal de Schrödinger* (NLS), el concepto es el de *solitón* y la tecnología multimillonaria es la de las *telecomunicaciones mediante fibras ópticas*. A continuación veremos cómo se iniciaron las investigaciones en estos tres campos y cómo se relacionaron entre sí.

Actualmente la ecuación NLS es reconocida mundialmente como una de las ecuaciones más importantes y más interesantes de la física-matemática. Sin embargo, la ecuación NLS no hizo su entrada en el mundo de la física de una manera ruidosa o espectacular. Todo lo contrario. En la década de los sesenta la ecuación NLS fue apareciendo calladamente en varias áreas de la física, fruto del trabajo de muy diversas personas, que venían trabajando de manera independiente unas de otras.

En 1961 L.P. Pitaevskii (el prestigioso colaborador de L.D. Landau y E.M. Lifshitz) obtuvo la ecuación NLS en 3+1 dimensiones (x , y , z y t) al estudiar el comportamiento del helio líquido a bajísimas temperaturas (cuando se presenta el fenómeno de la superfluidez). La ecuación obtenida por Pitaevskii es la siguiente [Pitaevskii 1961]:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + |u|^2 u = 0 \quad (1.1)$$

y en esta ecuación, el tiempo es la variable asociada a la evolución del sistema.

Poco tiempo después, en 1965, P.L. Kelley (del “Massachusetts Institute of Technology”) obtuvo una ecuación similar [Kelley 1965]:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + |u|^2 u = 0 \quad (1.2)$$

al estudiar la propagación de un rayo de luz a través de un dieléctrico cuyo índice de refracción depende de la intensidad de la luz. Casi al mismo tiempo, Akhmanov, Sukhorukov y Khokhlov (de la Universidad Estatal de Moscú) llegaron a una ecuación ligeramente más general al estudiar el mismo problema [Akhmanov *et al.* 1966]. Es importante observar que la ecuación obtenida por Kelley y Akhmanov *et al.* es matemáticamente similar a la ecuación de Pitaevskii, pero en (1.2) el tiempo no aparece y la coordenada z (la coordenada en la cual se propaga la luz) juega aquí el papel de “variable de evolución”. Esta diferencia hace que el significado físico de la ecuación (1.2) sea muy diferente al de la ecuación (1.1).

En el mismo año que Kelley encontró la ecuación (1.2) dos investigadores de Princeton, Norman Zabusky y Martín Kruskal, publicaron en el *Physical Review Letters* un artículo de gran importancia en el cual estudiaban numéricamente el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial parcial (EDP) de gran interés [Zabusky y Kruskal 1965]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0. \quad (1.3)$$

Esta ecuación había sido obtenida inicialmente por los holandeses D.J. Korteweg y G. de Vries en 1895 al estudiar la propagación de ondas en agua [Korteweg y de Vries 1895], pero había permanecido prácticamente olvidada durante 70 años. Zabusky y Kruskal, sin embargo, no estaban interesados en el movimiento de las ondas en agua. Les interesaba la ecuación de Korteweg y de Vries (KdV) porque esta ecuación estaba relacionada con un fenómeno peculiar encontrado por Fermi, Pasta y Ulam al estudiar la conductividad calorífica de los sólidos. En el Apéndice A se explica en qué consistía ese fenómeno (conocido como *recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam*). Lo que ahora nos interesa mencionar es que en su artículo de 1965, Zabusky y Kruskal encontraron numéricamente que la ecuación (1.3) aceptaba la propagación de ondas solitarias que viajaban a distintas velocidades (las ondas más altas viajaban más rápido) y dichas ondas interactuaban entre sí

de una forma interesante e inesperada. Cuando dos de estas ondas chocaban parecían pasar una a través de la otra, pues después de chocar ambas ondas reaparecían con su forma y velocidad originales. El carácter no lineal de la interacción se manifestaba en que las posiciones de las ondas después del choque no coincidía con las posiciones que hubieran tenido de no haberse producido el encuentro. Sin embargo, el hecho de que estas ondas recuperaran su forma y velocidad después de los choques sugería que éstas tenían una cierta identidad propia, que se conservaba a lo largo del tiempo. Basándose en esta observación, Zabusky y Kruskal decidieron bautizarlas con un nombre que recordara a los nombres de las partículas elementales (electrones, protones, neutrones, etc.) y decidieron llamarlas “**solitones**”.

El comportamiento de los solitones despertó el interés de otros investigadores de Princeton y dos años después Gardner, Greene, Kruskal y Miura publicaron en el *Physical Review Letters* un artículo de gran importancia, en el cual presentaban un método sumamente peculiar y original (conocido en inglés como “inverse scattering transform”, IST), que permitía resolver analíticamente el problema de condiciones iniciales para la ecuación KdV [Gardner *et al.* 1967]. En ese momento no se tenía idea de que hubiera alguna relación entre las ecuaciones KdV y NLS, pero poco tiempo después se descubriría que existe un vínculo muy importante entre ellas. Debido a esto, a quien desee trabajar con la ecuación NLS (o sus variantes) le conviene familiarizarse con la ecuación KdV. El lector interesado en conocer un poco más sobre la ecuación KdV y el método IST encontrará algo de información sobre estos temas en los apéndices A y B.

Durante los años de 1967 a 1970 las ecuaciones KdV y NLS continuaron teniendo historias separadas. En particular, en esos años se encontró que la ecuación NLS surge en múltiples contextos.

En 1967 D.J. Benney y A.C. Newell mostraron (mediante el método de escalas múltiples) que la ecuación NLS describe cómo evoluciona la envolvente de un tren de ondas que se propaga en un medio débilmente no lineal arbitrario [Benney y Newell 1967]. Poco después V.I. Karpman y E.M. Krushkal’ (de la Universidad Estatal de Novosibirsk, en Siberia) encontraron una ecuación similar siguiendo un procedimiento diferente [Karpman y Krushkal’ 1968].

En los siguientes tres años otros investigadores también encontraron la ecuación NLS al describir la propagación de ondas en fluidos profundos

[Zakharov 1968], en plasmas [Taniuti y Washimi 1968; Taniuti y Yajima 1969; Asano, Taniuti y Yajima 1969] y al describir la propagación de calor en sólidos [Tappert y Varma 1970].

En todos los casos mencionados en los dos últimos párrafos la variable de evolución era el tiempo y la forma de la ecuación NLS a la que llegaron Benney, Zakharov, Taniuti, Tappert y sus respectivos colaboradores, era la siguiente:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma |u|^2 u = 0. \quad (1.4)$$

En 1971 V.E. Zakharov y A.B. Shabat (del Instituto de Hidrodinámica, en Siberia) hicieron un descubrimiento notable [Zakharov y Shabat 1971]: mostraron que la ecuación NLS podía resolverse por “inverse scattering” y tenía soluciones tipo *solitón*. De hecho, Zakharov y Shabat encontraron la expresión analítica exacta que describe la interacción de N solitones (con N arbitraria) que evolucionan de acuerdo a la ecuación NLS. El lector interesado encontrará una brevísima descripción de la parte medular del trabajo de Zakharov y Shabat en el Apéndice C.

El artículo de Zakharov y Shabat marcó el punto de encuentro de las ecuaciones KdV y NLS. Este trabajo mostró que la ecuación NLS tiene varias cosas en común (cosas interesantes) con la ecuación KdV: ambas tienen soluciones tipo *solitón*, en ambos casos los solitones interactúan de manera similar y ambas ecuaciones pueden resolverse utilizando las ideas de “inverse scattering”. Más adelante se iría descubriendo que las ecuaciones KdV y NLS tienen más propiedades comunes, por lo cual a quien esté interesado en una de estas ecuaciones le conviene estar al tanto de los hallazgos concernientes a la otra ecuación.

Lo dicho anteriormente muestra que para 1971 se sabía ya que la ecuación NLS aparecía en problemas relacionados con bajas temperaturas, fluidos profundos, plasmas, e inclusive con la propagación de calor en sólidos [Tappert y Varma 1970]. También se sabía que era una ecuación con propiedades matemáticas interesantes. Sin embargo, en 1971 la ecuación NLS aún no había penetrado en el mundo de las tecnologías comerciales y multimillonarias.

Esta situación cambió en 1973, cuando dos investigadores de los Laboratorios Bell (en Nueva Jersey), Akira Hasegawa y Frederick Tappert, mostraron teóricamente que era factible transmitir pulsos luminosos de muy corta duración (picosegundos) a lo largo de fibras ópticas, sin que dichos pulsos se distorsionaran o se traslaparan y encontraron que la propagación de estos pulsos estaba gobernada por la ecuación [Hasegawa y Tappert 1973]:

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u \right) + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma |u|^2 u = 0. \quad (1.5)$$

En el caso en que la fibra óptica fuera suficientemente transparente, el tercer término de la ecuación podía despreciarse y la ecuación resultante podía convertirse en la ecuación NLS (1.4) mediante un sencillo cambio de variable. De esta forma, la ecuación NLS se convirtió inmediatamente en una ecuación de interés para las grandes compañías de telecomunicaciones, pues los resultados de Hasegawa y Tappert sugerían fuertemente que si se lograban producir fibras suficientemente transparentes (para alguna longitud de onda), había grandes posibilidades de desarrollar un nuevo sistema de telecomunicaciones basado en fibras ópticas.

Si el artículo de Hasegawa y Tappert hubiera aparecido 10 años atrás, en 1963, quizás no habría despertado el interés de las compañías de telecomunicaciones. En 1963 las fibras ópticas existentes eran demasiado opacas para ser usadas en telecomunicaciones. Sin embargo, en 1966 tuvo lugar un descubrimiento crucial en el campo de las fibras ópticas. Para apreciar el valor de dicho descubrimiento conviene recordar aquí cómo se mide la transparencia de un material.

Todos sabemos que el vidrio que usamos en nuestras ventanas es transparente para la luz visible. De hecho, usualmente el vidrio es transparente para longitudes de onda comprendidas entre 350nm y 2500nm [La Técnica p. 746], que es un intervalo que sobrepasa el rango de longitudes de onda de la luz, el cual va de 390nm a 780nm [Hecht y Zajac p. 140]. Sin embargo, todos sabemos también que la intensidad de la luz se verá atenuada al atravesar una muestra de vidrio de gran espesor. Dicha atenuación obedece una ecuación de la forma [Hecht y Zajac p. 85; Agrawal p. 5]:

$$P(x) = P_o e^{-\alpha x} \quad (1.6)$$

donde P es la potencia de la luz, x es el espesor del material y α es la constante de atenuación, la cual es una medida de la transparencia (u opacidad) de un material. La ecuación anterior también puede escribirse en la forma:

$$P(x) = P_o (10)^{-\alpha_{dB} x/10} \quad (1.7)$$

y en tal caso, si x se mide en kilómetros, se dice que las unidades de la constante α_{dB} son dB/km (decibeles por kilómetro).

Las fibras ópticas anteriores a 1970 tenían pérdidas (atenuaciones) del orden de 1000 dB/km. Con estas fibras la intensidad de la luz disminuía a un 10% de su valor inicial tras un recorrido de 10m a lo largo de la fibra. Eran útiles para aparatos médicos, u otras aplicaciones en las que la luz tuviera que transmitirse a unos pocos metros de distancia, pero no servían para telecomunicaciones, donde las distancias de interés son del orden de kilómetros.

En 1966, sin embargo, Kao y Hockham descubrieron teóricamente que la atenuación luminosa en las fibras ópticas era debida, principalmente, a impurezas presentes en el vidrio con el cual se fabrican las fibras y no al vidrio en sí mismo y predijeron que eliminando dichas impurezas sería posible disminuir el valor de α_{dB} de 1000 dB/km a 20 dB/km, aproximadamente [Kao y Hockham 1966]. Con el descubrimiento de Kao y Hockham se inició una carrera mundial encaminada a obtener fibras más transparentes y en 1970 Kapron, Keck y Maurer lograron confirmar que la predicción de Kao y Hockham era correcta, al construir fibras ópticas con $\alpha_{dB} = 20$ dB/km [Kapron *et al.* 1970].

Así pues, el artículo de Hasegawa y Tappert apareció en un momento (1973) en el cual, aunque todavía no se tenían fibras ópticas capaces de ser utilizadas en telecomunicaciones, ya se veía con toda claridad que pronto se lograrían fabricar.

En 1979 Miya, Terunuma, Hosaka y Miyoshita lograron finalmente obtener fibras ópticas con $\alpha_{dB} = 20$ dB/km para $\lambda = 1550$ nm, en las cuales la luz (infrarroja) puede viajar 50km antes de que su intensidad decaiga a un

10% de su valor inicial [Miya *et al.* 1979]. Estas fibra eran ya lo suficientemente transparentes para ser usadas en telecomunicaciones.

En 1980 Mollenauer, Stolen y Gordon (también de los Laboratorios Bell, como Hasegawa y Tappert) reportaron en el *Physical Review Letters* que eran ya capaces de transmitir pulsos luminosos de 7 ps de duración (y 1.55 μm de longitud de onda) a través de las nuevas fibras ópticas [Mollenauer *et al.* 1980] y con su trabajo todo estaba listo para que las fibras ópticas desplazaran a los cables metálicos de las telecomunicaciones modernas. En el trabajo de Mollenauer, Stolen y Gordon se hacía notar, además, que la ecuación que describe adecuadamente la propagación de pulsos luminosos de unos cuantos picosegundos de duración no es la ecuación (1.5) presentada inicialmente por Hasegawa y Tappert, sino la ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0. \quad (1.8)$$

Ésta es la ecuación NLS, sólo que aquí, a diferencia de lo que ocurría en las ecuaciones (1.4) y (1.5), la variable de evolución no es el tiempo, sino la coordenada z (*i.e.*, la distancia a lo largo de la fibra).

Si consideramos que la tecnología de telecomunicaciones mediante fibras ópticas empezó a gestarse en 1973 (con la publicación del artículo de Hasegawa y Tappert), podemos ver que el período de gestación fue de siete años, pues el artículo de Mollenauer, Stolen y Gordon, publicado en 1980, constituye el acta de nacimiento de la nueva tecnología. En esta acta se hace constar que desde su nacimiento la nueva tecnología está indisolublemente ligada a la ecuación NLS y al concepto de solitón.

Para finalizar esta sección resulta conveniente observar la Tabla 1.1, en la cual hemos colocado (en orden cronológico) algunos de los nombres de los investigadores que iniciaron el estudio de los solitones, la ecuación NLS y las nuevas fibras ópticas de gran transparencia. En esta tabla podemos ver que durante la década de los sesenta las investigaciones en torno a los solitones, la ecuación NLS y las fibras ópticas avanzaron de manera independiente. Esta década resultó de crucial importancia para los tres cam-

Tabla 1.1 Surgimiento de los solitones, la ecuación NLS y las nuevas fibras ópticas.

Año	Solitones	Ecuación NLS	Fibras ópticas
1960			
1		Pitaevskii	
2			
3			
4			
5	Zabusky-Kruskal	Kelley	
6		Akhmanov <i>et al.</i>	Kao-Hockham
7	Gardner <i>et al.</i>	Benney-Newell	
8	Lax	Zakharov, Taniuti, Karpman	
9		Taniuti <i>et al.</i>	
1970		Tappert-Varma	Kapron-Keck-Maurer
1	Zakharov y Shabat		
2			
3	Hasegawa y Tappert		
4			
5			
6			
7			
8			
9			Miya <i>et al.</i>
1980	Mollenauer, Stolen y Gordon		

pos. En ella surgió la ecuación NLS (en problemas diversos), se descubrieron los solitones y se encontró que el vidrio (de SiO_2) podía ser mucho más transparente de lo que se había pensado anteriormente. Es interesante observar que estos avances parecieran haber estado sincronizados, de forma tal que al empezar la década de los setenta pudiera darse un encuentro provechoso entre los tres campos. La vinculación entre ellos se produjo con gran rapidez. En 1971 el artículo de Zakharov y Shabat unió a la ecuación NLS con la teoría de solitones y sólo dos años después el artículo de Hasegawa y Tappert unió a la ecuación NLS (y los solitones) con las fibras ópticas. Esta “triple conjunción” es uno de los encuentros más interesantes de la ciencia del siglo XX. Es uno de los pocos casos en que un problema físico interesante, unas matemáticas novedosas y una tecnología también nueva, se conjugan en el lapso de un par de años y fructifican rápidamente.

Capítulo 2

Telecomunicaciones

En vista de que la ecuación NLS está íntimamente relacionada con la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas y este proceso ha venido a revolucionar la tecnología en telecomunicaciones, conviene tener una idea del lugar que ocupan las comunicaciones por fibra óptica dentro del espectro completo de las telecomunicaciones.

Como todos los sistemas de telecomunicaciones funcionan con base en ondas electromagnéticas con longitudes de onda superiores a las de la luz visible, en la Tabla 2.1 mostramos las bandas en las que se divide esta porción del espectro e indicamos algunos de los usos de estas bandas.

La Tabla 2.1 muestra que las fibras ópticas se utilizan en las comunicaciones telefónicas. Sin embargo, todos sabemos (y lo vemos en la tabla) que la comunicación por teléfono también puede hacerse mediante alambres (o cables) metálicos. La pregunta ahora sería: ¿qué sistema es más conveniente: alambres metálicos o fibras ópticas? La respuesta es conocida: las fibras ópticas son más convenientes. Lo que ya no es tan conocido es el por qué. Es decir: ¿por qué las fibras ópticas son mejores que los alambres metálicos? Para encontrar la respuesta a esta pregunta veamos brevemente cómo se efectúa la comunicación telefónica.

Cuando un estímulo sonoro incide en un micrófono se genera una señal de voltaje que puede aproximarse por una serie de Fourier con componentes de distintas frecuencias. Las señales musicales de alta calidad contienen componentes de frecuencia significativas en la totalidad del intervalo audible, que va, aproximadamente, desde 20 Hz hasta cerca de 20 kHz. Una conversación telefónica, sin embargo, es perfectamente inteligible si el sistema telefónico transmite fielmente las componentes de la señal en el intervalo de 300 Hz a 3.4 kHz. En la práctica se considera que la voz telefónica es una señal con frecuencias comprendidas entre 0 Hz y 4 kHz [O'Reilly pp. 2-3].

Tabla 2.1 Espectro electromagnético y telecomunicaciones

Tipo de Señal	Frecuencia Límite Superior	Longitud de Onda Límite Inferior	Uso	
			Transmisión por aire	Transmisión por alambres, cables coaxiales o fibras ópticas
Radiofrecs.				
VLF	< 30 kHz	> 10 km		Telégrafo ^(a)
LF	< 300 kHz	> 1 km	Navegación ^(b)	Tel. (alambre) ^(c)
MF	< 3 MHz	> 100 m	Radio AM	Tel. (alambre) ^(c)
HF	< 30 MHz	> 10 m	Radio onda corta	Tel. (cable) ^(c)
VHF	< 300 MHz	> 1 m	TV, Radio FM	Tel. (cable) ^(c)
UHF	< 3 GHz	> 10 cm	TV, Tel. celular	TV (cable) ^(d)
Microondas	< 300 GHz	> 1 mm	Radar ^(e)	
Infrarrojo	< 384 THz	> 780 nm		Tel. (por fibra óptica)

(a) *La Técnica* p. 682

(c) Bellamy pp. 26-29

(e) Wells p. 70

(b) *La Técnica* p. 521

(d) Hecht p. 369

En los sistemas telefónicos analógicos con líneas de transmisión metálicas, cuando se quieren transmitir dos conversaciones telefónicas simultáneamente, lo que se hace es duplicar todas las frecuencias correspondientes a la segunda señal y se envía una señal eléctrica con un ancho de banda de 8 kHz (i.e., con frecuencias entre 0 Hz y 8 kHz). En forma similar se pueden transmitir N conversaciones simultáneas si usamos una señal con un ancho de banda de al menos 4N kHz. El valor de N, sin embargo, no puede ser arbitrariamente grande, ya que la atenuación de una onda electromagnética que se propaga por un alambre (o un cable coaxial) aumenta con la frecuencia y las ondas de muy alta frecuencia ($\nu > 60$ MHz) se atenúan demasiado rápido con respecto a las distancias de interés en

telecomunicaciones. En la práctica existen sistemas telefónicos comerciales analógicos (con líneas de transmisión metálicas) capaces de transmitir 12, 60, 600, 3600 y 10, 800 conversaciones simultáneas. En la Tabla 2.2 podemos observar las bandas de frecuencias utilizadas por los distintos sistemas y la distancia entre repetidores (que son los equipos que regeneran las señales atenuadas).

En los sistemas telefónicos modernos las señales analógicas se transforman en señales digitales, las cuales son menos vulnerables al ruido y a las distorsiones y pueden ser manipuladas más fácilmente que las señales analógicas [Hecht p. 276; Bellamy cap. 2].

El procedimiento que se sigue para transformar una señal analógica en una señal digital (i.e., en un código binario) es interesante [O'Reilly pp. 107-108]. Dicho procedimiento consta de dos pasos: la *cuantización* y el *muestreo* de la señal.

La cuantización de la señal analógica original consiste en reemplazar la señal continua inicial, por una señal escalonada, en la cual las alturas de los escalones sólo pueden tomar valores discretos. El número de escalones debe ser igual a 2^n , donde n es un número natural, de modo que a cada nivel le corresponda un número binario de n bits y viceversa. En la Fig. 2.1 (a) se muestra un ejemplo en el cual $n = 3$, de manera que el número de niveles discretos es igual a $2^3 = 8$.

El segundo paso es el *muestreo* de la señal ya cuantizada. Esto consiste en medir la altura de la señal cuantizada a intervalos regulares de tiempo. Estas mediciones se representan por la sucesión de flechas indicadas en la Fig. 2.1 (b). Como resultado de estas mediciones obtenemos una sucesión de niveles, tal como se indica en la Fig. 2.1 (c) y si ahora estos niveles se expresan en forma binaria obtenemos un código binario correspondiente a la señal analógica inicial. Este código binario puede entonces traducirse en una señal digital como la mostrada en la Fig. 2.1 (e). Es importante observar que no podemos saber el significado de una señal digital como la de la Fig. 2.1 (e) si no conocemos el número de niveles discretos considerados y el intervalo entre las mediciones. En los sistemas telefónicos comerciales se utilizan $2^8 = 256$ niveles para cuantizar la señal y la señal ya cuantizada se muestrea 8000 veces por segundo [Keiser y Strange p. 15]. Esta frecuencia de muestreo es necesaria para reconstruir señales que tengan componentes

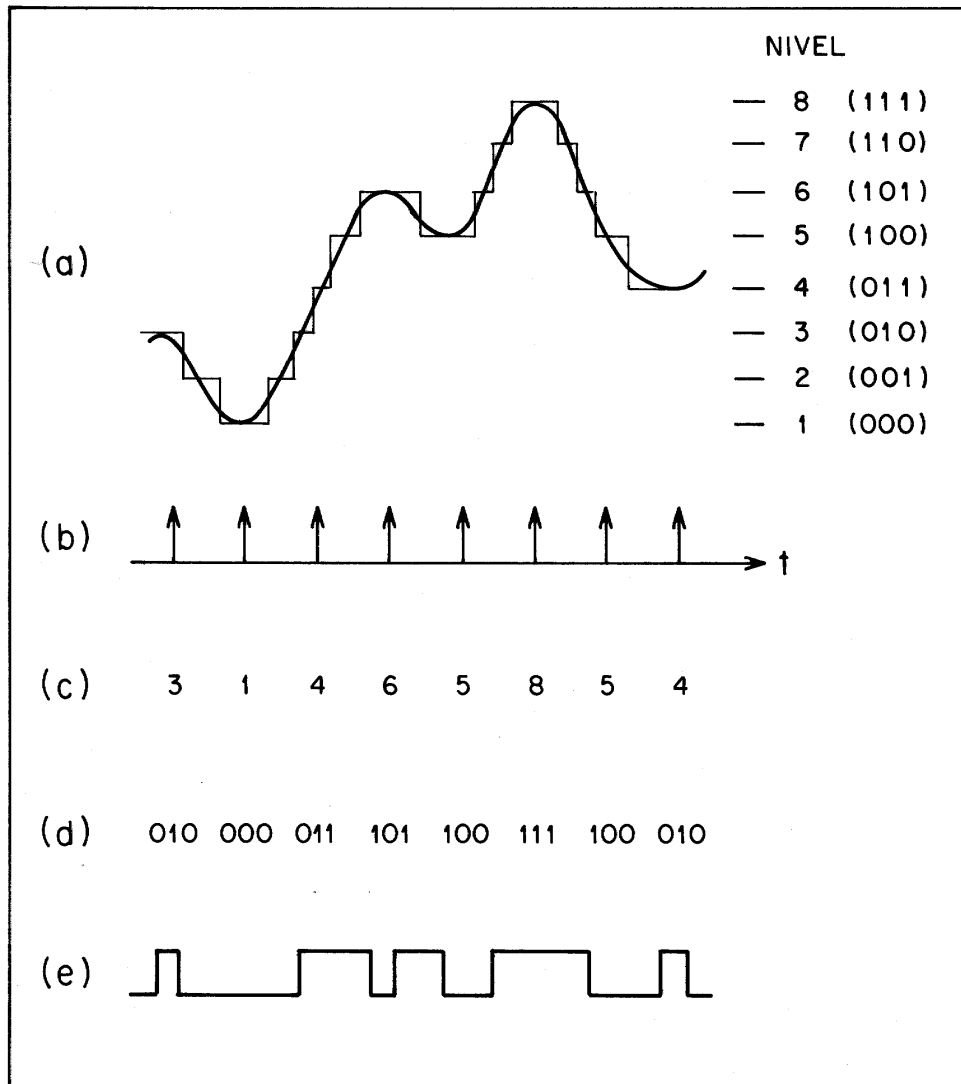


Fig. 2.1 (a) Cuantización de una señal analógica. (b) Tiempos en los que se realiza el muestreo. (c) Sucesión de niveles obtenidos en el muestreo. (d) Expresión binaria para la sucesión de niveles. (e) Señal digital.

de frecuencia significativas hasta de 4 kHz [Keiser y Strange p. 10]. Notemos que como cada medición se traduce en un número binario de 8 bits y se toman 8000 mediciones por segundo, una conversación telefónica se traduce en una señal digital con una velocidad (un “bit rate”) de 64,000 *bits / seg* = 64 kb/s. Utilizando una señal con una velocidad de 64 N kb/s (o mayor) podemos enviar N conversaciones telefónicas digitalizadas simultáneamente, intercalando los bits de las distintas conversaciones de una manera ordenada (mediante un proceso llamado *multiplexión*). El valor de N, sin embargo, no puede ser arbitrariamente grande. A continuación veremos qué tan grande puede ser N cuando las líneas telefónicas son metálicas y cuando son de fibra óptica.

En el caso de las líneas metálicas, si queremos transmitir un código binario tal como el que se muestra en la Fig. 2.2 (a), lo primero que se ocurre es modular una onda electromagnética en la forma mostrada en la Fig. 2.2 (b). Sin embargo, para poder hacer esto, es necesario que la frecuencia de la onda sea mayor o igual al “bit rate” al cual deseamos (o necesitamos) enviar nuestro código binario. Esto parecería implicar que el máximo “bit

Tabla 2.2 Tipos de líneas telefónicas analógicas [Bellamy pp. 26-29]

Tipo de línea	Conver- -saciones simultáneas que pueden transmitirse	Banda de frecuencias (kHz)	Material	Distancia entre repetidores (millas)
Grupo	12	60-108	Alambre	
Super grupo	60	312-552	Alambre	
Gpo. Maestro	600	564-3,084	Cable coaxial	8
Gpo. Jumbo	3,600	564-17,548	Cable coaxial	2
Gpo. Jumbo Max	10,800	3,000-60,000	Cable coaxial	1

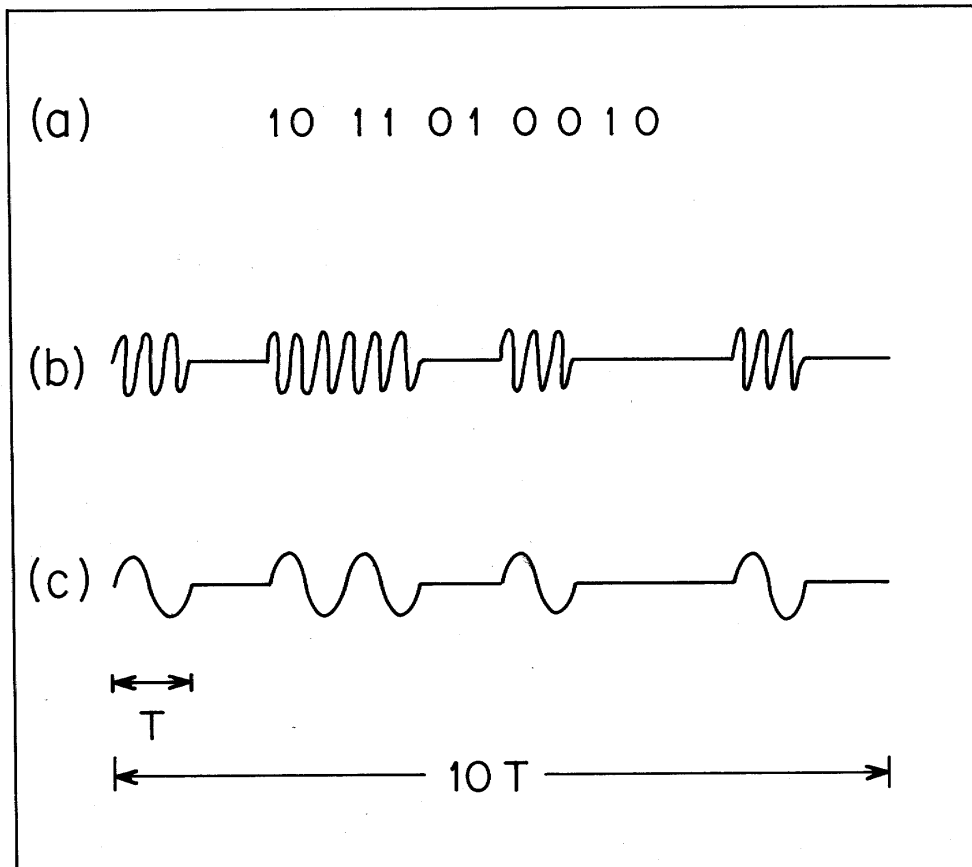


Fig. 2.2 (a) Un código binario. (b) Transmisión del código binario mediante la modulación de la amplitud de una señal sinusoidal. (c) Diagrama que muestra que una onda de período T parecería requerir un tiempo de $10T$ para transmitir 10 “bits” de información.

rate” posible con líneas metálicas estaría alrededor de 60 Mb/s, ya que, como mencionamos antes, las ondas de muy alta frecuencia ($\nu > 60$ MHz) se atenúan demasiado pronto con respecto a las distancias de interés en telecomunicaciones. Si esto fuera así, el máximo número de conversaciones

telefónicas digitalizadas que podrían ser transmitidas simultáneamente por una línea metálica andaría alrededor de $937 \approx (60 \text{ Mb/s}) / (64 \text{ kb/s})$, que es un número bastante por debajo del máximo número de conversaciones telefónicas que pueden ser transmitidas simultáneamente mediante un sistema analógico.

Resulta, sin embargo, que usando una línea telefónica metálica y una onda electromagnética de 60 MHz, es posible transmitir una señal digital a una velocidad de 140 Mb/s [O'Reilly, p. 7], lo cual está bastante por encima de los 60 Mb/s que parecían ser el máximo "bit rate" posible con una onda de 60 MHz. ¿Cómo puede ser esto posible?

La conclusión errónea de que el máximo "bit rate" que se puede transmitir mediante una onda de W Hz es, precisamente, de W b/s, es una consecuencia de haber supuesto que para transmitir un código binario (una sucesión de "unos" y "ceros") había que usar dos tipos de señales eléctricas, una para representar al "uno" y otra para representar el "cero". Esta es, sin duda, la forma más directa de traducir un código binario en una señal eléctrica, *pero no es la única forma*. Otra posibilidad sería, por ejemplo, usar $2^2 = 4$ tipos de señales de la misma frecuencia, pero con distinta amplitud o distinta fase. Estas cuatro señales se podrían usar para representar, respectivamente, los códigos binarios 00, 01, 10 y 11. De esta manera, con cada ciclo de la onda electromagnética se enviarían 2 bits en lugar de uno y por consiguiente, con una onda de W Hz podría transmitirse una señal digital a una velocidad $2W$ b/s. En la Fig. 2.3 mostramos cuatro posibles señales de igual período que podrían usarse para representar los códigos 00, 01, 10 y 11 y cómo con estas señales podríamos transmitir el mismo código que mostramos en la Fig. 2.2 (a) en la mitad de tiempo que antes.

Extendiendo la idea anterior, si consideramos 2^S tipos de señales de igual frecuencia, formadas con la combinación de A amplitudes diferentes y F fases distintas (donde A y F son tales que $AF = 2^S$), tendremos señales suficientes para representar los 2^S códigos binarios distintos que pueden escribirse usando s bits y por lo tanto cada ciclo de la onda representará, no un sólo bit, sino s bits. De esta forma, con una onda de W Hz podremos enviar una señal digital a una velocidad de sW b/s. En la práctica, es posible usar hasta $64 = 2^6$ tipos de señales de igual frecuencia (combinando 4 amplitudes diferentes, con 16 fases distintas) [Keiser y Strange pp. 130-136], de manera que con una onda de 60 MHz podrían enviarse señales digitales a

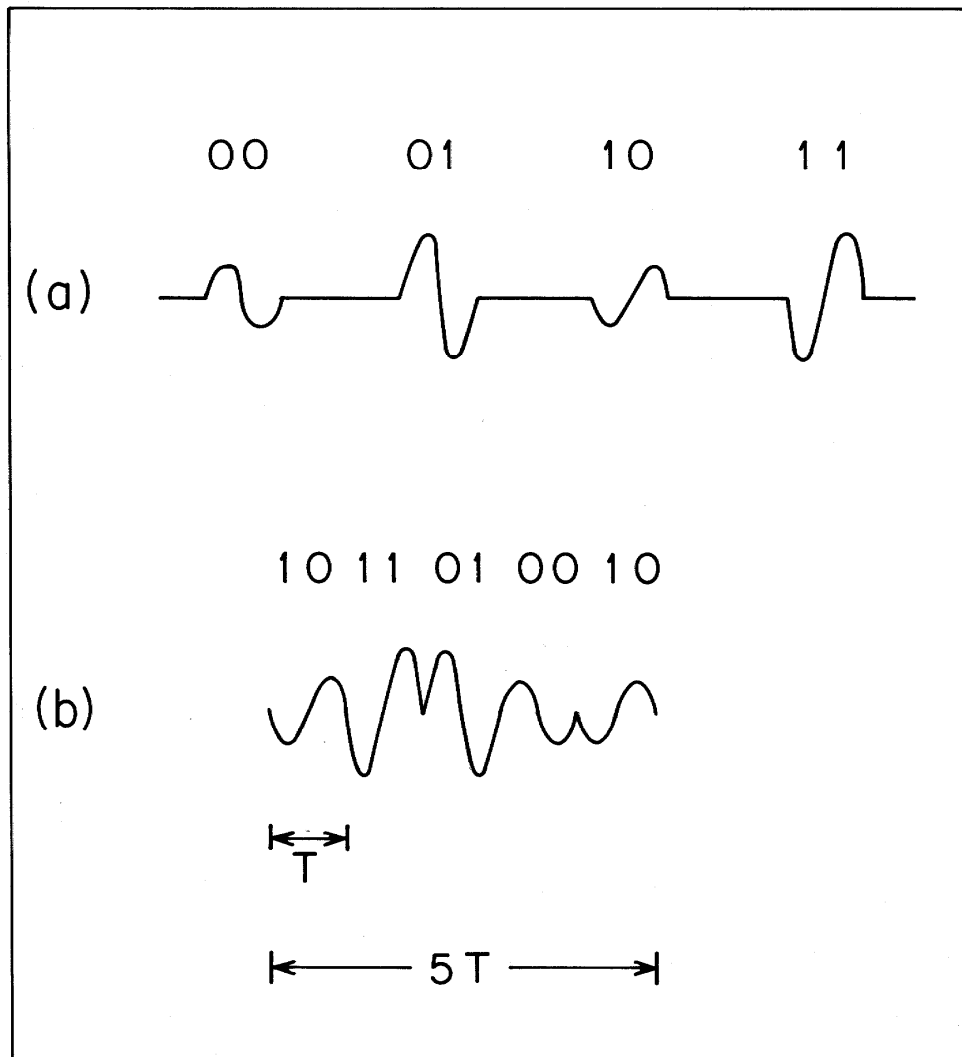


Fig. 2.3 (a) Cuatro señales de igual período, pero diferentes amplitudes o fases, que pueden emplearse para transmitir los códigos 00, 01, 10 y 11. (b) Diagrama que muestra que si utilizamos $2^2 = 4$ tipos de señales distintas, pero cada una de período T , podemos enviar 10 “bits” de información en un tiempo de $10T / 2 = 5T$.

una velocidad de $(60 \times 60) \text{ Mb/s} = 360 \text{ Mb/s}$, lo cual permitiría transmitir alrededor de $5600 \approx (360 \text{ Mb/s}) / (64 \text{ kb/s})$ conversaciones digitalizadas simultáneamente. Los sistemas digitales comerciales más rápidos (con líneas metálicas) trabajan a 274 Mb/s en América, a 400 Mb/s en Japón y a 565 Mb/s en Europa y son capaces de transmitir, respectivamente, 4032, 5760 y 7680 conversaciones digitalizadas simultáneamente [Keiser y Strange p. 148; Hecht p. 323]. En la práctica, la mayoría de los sistemas digitales comerciales (con líneas metálicas) trabajan a velocidades mucho más bajas. En América del norte, por ejemplo, los sistemas comerciales se clasifican en seis niveles, dependiendo de la velocidad a la cual trabajen. En la Tabla 2.3 vemos las velocidades de estos seis tipos de sistemas y el número de conversaciones simultáneas que pueden transmitir [Bellamy p. 61; Hecht p. 323].

En el caso de transmisión de datos entre computadoras conectadas con cables metálicos las velocidades de transmisión son usualmente del orden de 2.5 Mb/s.

Una vez teniendo una idea de cómo funcionan los sistemas telefónicos analógicos y digitales que utilizan líneas de transmisión metálicas, pasemos a ver cómo es la comunicación telefónica mediante fibras ópticas.

Tabla 2.3 Clasificación de los sistemas telefónicos digitales que utilizan líneas metálicas (en América).

Nivel			“Bit rate”	Núm. de conversaciones simultáneas que puede transmitir
T1	o	DS1	1.5 Mb/s	24
T1C	o	DS1C	3.1 Mb/s	48
T2	o	DS2	6.3 Mb/s	96
T3	o	DS3	45 Mb/s	672
T3C	o	DS3C	90 Mb/s	1344
T4	o	DS4	274 Mb/s	4032

La transmisión de información a través de fibras ópticas es digital: cuando aparece un “uno” en un código binario que deseamos transmitir, se envía un pulso luminoso a través de la fibra y cuando aparece un “cero” se mantiene apagada la fuente de luz. En 1993 los sistemas comerciales más rápidos (a base de fibras ópticas) trabajaban a una velocidad de 2.4 Gb/s [Hecht pp. 323, 324, 333], aún cuando existen sistemas no comerciales que pueden trabajar a 10 Gb/s. Si recordamos que para transmitir una conversación telefónica requerimos 64 kb/s, veremos que un sistema telefónico que trabaja a 2.4 Gb/s puede transmitir alrededor de 37, 500 conversaciones simultáneas.

Si comparamos las 37,500 conversaciones simultáneas que se pueden transmitir por una fibra óptica, con las 7680 conversaciones que se pueden enviar con el sistema digital más rápido hecho a base de cables metálicos y si recordamos, además, que las señales luminosas que viajan por las fibras pueden recorrer entre 30 y 50 km sin necesidad de repetidores intermedios [Hecht p. 162], mientras que los cables metálicos requieren repetidores cada 1 ó 2 km para transmitir señales con frecuencias del orden de MHz, entenderemos por qué las compañías telefónicas han sustituido sus líneas metálicas por fibras ópticas.

Para tener una idea de la rapidez con que las fibras ópticas desplazaron a los cables metálicos de las telecomunicaciones, es interesante observar que el séptimo cable submarino TransAtlántico (el TAT-7) colocado en 1983 era metálico [Hecht p. 328], mientras que el siguiente cable transatlántico (el TAT-8), que se puso en operación en 1988, ya era de fibras ópticas.

Es conveniente indicar aquí que los pulsos luminosos que se utilizan en los sistemas telefónicos actuales no son realmente “solitones ópticos”, porque el perfil de los pulsos no es exactamente una secante hiperbólica. Por el momento, las condiciones en las que operan los sistemas telefónicos comerciales no requieren el uso de verdaderos solitones. Sin embargo, se considera que en un futuro cercano sí va a ser necesario usar verdaderos solitones ópticos en los sistemas telefónicos.

Más adelante veremos bajo qué condiciones es posible que un pulso luminoso se propague sin distorsiones por una fibra óptica sin ser realmente un solitón y en qué circunstancias sí es imprescindible que la forma del pulso sea la de un solitón exacto para que el pulso pueda viajar por la fibra sin deformarse.

Capítulo 3

Deducción de la ecuación NLS

Como veremos a continuación, uno de los procesos que puede ser descrito mediante la ecuación NLS es el comportamiento de la envolvente de una onda electromagnética que se propaga por un dieléctrico en el cual la polarización depende del campo eléctrico de forma no lineal.

Empecemos por recordar a las ecuaciones de Maxwell (en el sistema mks):

$$\varepsilon_o \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_L - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_o \left(\mathbf{J}_L + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético, \mathbf{P} es la polarización, \mathbf{M} la magnetización, ρ_L y \mathbf{J}_L son la densidad de carga y la corriente correspondientes a las cargas libres y ε_o y μ_o son la permitividad y permeabilidad del vacío (respectivamente).

En el caso de un dieléctrico ($\rho_L = \mathbf{J}_L = 0$) no magnético ($\mathbf{M} = 0$) las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_o \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

y de las dos últimas ecuaciones se sigue que:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Usando ahora la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ podemos escribir a la ecuación (3.9) en la forma:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.10)$$

Veamos ahora si esta ecuación permite la propagación de ondas planas linealmente polarizadas, en las cuales el campo eléctrico sea perpendicular a la dirección de propagación. Si colocamos nuestros ejes de coordenadas de manera que el eje z coincida con la dirección de propagación y el eje y sea paralelo al campo eléctrico, tendremos que el campo $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ sólo tendrá componente y , es decir:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (0, E, 0) = \mathbf{j} E(x, y, z, t), \quad (3.11)$$

donde \mathbf{j} es un vector unitario paralelo al eje y . Por otra parte, si el material es isotrópico, el campo $\mathbf{P}(x, y, z, t)$ inducido por la onda eléctrica transversal también tendrá solamente componente y , de modo que podemos escribir:

$$\mathbf{P}(x, y, z, t) = (0, P, 0) = \mathbf{j} P(x, y, z, t). \quad (3.12)$$

Tomando en cuenta (3.11) y (3.12) podemos ver que en el caso de ondas eléctricas transversales linealmente polarizadas (en la dirección y), la componente y de la ecuación (3.10) tiene la forma siguiente:

$$E_{xx} + E_{zz} - \mu_o \varepsilon_o E_{tt} - \mu_o P_{tt} = 0, \quad (3.13)$$

mientras que las componentes x y z se reducen, respectivamente, a lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial y} = 0 \quad (3.14)$$

Podemos ver que estas dos últimas ecuaciones se satisfacen trivialmente si consideramos que el campo eléctrico no depende de la coordenada y . Por otra parte, para poder obtener alguna solución de la ecuación (3.13) es necesario especificar cómo depende la polarización del campo eléctrico.

En rigor, la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} en un dieléctrico arbitrario es no lineal y no instantánea. Sin embargo, la polarización responde de manera extremadamente rápida a los cambios en el campo eléctrico (en SiO_2 , por ejemplo, el tiempo de respuesta es del orden de 60 o 70 fs), por lo cual podemos considerar que \mathbf{P} responde instantáneamente a los cambios de \mathbf{E} [Agrawal 3^a ed. p. 41; Akhmediev y Ankiewicz p. 4].

Suponiendo, pues, una respuesta instantánea, la relación entre \mathbf{P} y \mathbf{E} puede expresarse en general mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\varepsilon_o} \mathbf{P} = \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (3.15)$$

donde $\chi^{(n)}$ es un tensor de orden $n+1$, $\mathbf{E}\mathbf{E}$ es el tensor de 2^o orden con componentes $(\mathbf{E}\mathbf{E})_{ij} = E_i E_j$, $\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E}$ es el tensor de 3^{er} orden tal que $(\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E})_{ijk} = E_i E_j E_k$ y los tres términos que se muestran en el miembro derecho de (3.15) son vectores tridimensionales cuyas componentes son las siguientes:

$$(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E})_i = \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j, \quad (3.16)$$

$$(\chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E})_i = \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k, \quad (3.17)$$

$$(\chi^{(3)} \vdots \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E})_i = \sum_j \sum_k \sum_l \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l. \quad (3.18)$$

Cuando el material es isotrópico la relación (3.15) se simplifica mucho pues el tensor $\chi^{(1)}$ es diagonal y sus elementos diagonales son iguales [Akhmediev y Ankiewicz pp. 2-3], $\chi^{(2)}$ es nulo [Agrawal 15; Newell y Moloney p. 33] y de los $3^4 = 81$ componentes de $\chi^{(3)}$, sólo los 21 componentes que tienen dos índices repetidos (*i.e.*, componentes de la forma $\chi_{iikk}^{(3)}$) son distintos de cero y de esos 21 elementos sólo tres son independientes (por ejemplo $\chi_{yy yy}^{(3)}$, $\chi_{yy xx}^{(3)}$ y $\chi_{yzyy}^{(3)}$ podrían considerarse independientes) [Newell y Moloney 33].

Si además de tener un material isotrópico nos restringimos al caso en que \mathbf{E} esté linealmente polarizado, la ecuación (3.15) se simplifica aún más, pues las restricciones sobre $\chi^{(3)}$ implican que \mathbf{P} tendrá la misma polarización que \mathbf{E} , de modo que (3.15) se reduce a una ecuación escalar:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_o \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_o \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 \equiv \mathbf{P}^{(L)} + \mathbf{P}^{(NL)}, \quad (3.19)$$

donde $\chi^{(1)} \equiv \chi_{yy}^{(1)}$ y $\chi^{(3)} \equiv \chi_{yyyy}^{(3)}$. En esta ecuación ya no incluimos términos no lineales de orden superior a 3, pues la magnitud de dichos términos es mucho menor y usualmente se consideran despreciables.

Sustituyendo (3.19) en (3.13) obtenemos la ecuación:

$$E_{xx} + E_{zz} - \mu_o \varepsilon_L E_{tt} - \mu_o P_{tt}^{(NL)} = 0 \quad (3.20)$$

donde:

$$\varepsilon_L \equiv \varepsilon_o (1 + \chi^{(1)}) \quad (3.21)$$

es la constante dieléctrica lineal y $P^{(NL)}$ es la parte no lineal de la polarización:

$$P^{(NL)} = \varepsilon_o \chi^{(3)} E^3. \quad (3.22)$$

Recordemos ahora que la ecuación (3.20), al igual que (3.13), describe la propagación de una onda plana linealmente polarizada que avanza en la dirección z . Sobre el origen de dicha onda no hemos dicho nada, pero conviene imaginar que ha sido generada mediante un láser de frecuencia ω_o .

Consideremos ahora a las soluciones de (3.20) que pueden expresarse en la forma:

$$E(x, z, t) = \frac{1}{2} \bar{E}(x, z, t) \exp[i(\beta_o z - \omega_o t)] + c.c. \quad (3.23)$$

donde c.c. indica el complejo conjugado, β_o es una constante cuyo valor se elegirá más adelante y $\bar{E}(x, z, t)$ es una función que varía lentamente con z en comparación con $\exp[i(\beta_o z - \omega_o t)]$, de manera que $|\bar{E}_z| \ll \beta_o |\bar{E}|$ y $|\bar{E}_{zz}| \ll \beta_o |\bar{E}_z|$.

Si el campo eléctrico tiene la forma (3.23), la ecuación (3.22) nos dice que la parte no lineal de la polarización tendrá la forma:

$$\begin{aligned} P^{(NL)}(x, z, t) &= \varepsilon_o \chi^{(3)} \left[\frac{1}{2} \bar{E} \exp[i(\beta_o z - \omega_o t)] + \frac{1}{2} \bar{E}^* \exp[-i(\beta_o z - \omega_o t)] \right]^3 \\ &= \frac{1}{8} \varepsilon_o \chi^{(3)} \left[\bar{E}^3 \exp[3i(\beta_o z - \omega_o t)] + 3 \bar{E}^2 \bar{E}^* \exp[i(\beta_o z - \omega_o t)] \right. \\ &\quad \left. + 3 \bar{E} (\bar{E}^*)^2 \exp[-i(\beta_o z - \omega_o t)] + (\bar{E}^*)^3 \exp[-3i(\beta_o z - \omega_o t)] \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si ahora sustituyéramos (3.23) y (3.24) en (3.20) podríamos obtener una ecuación para $\bar{E}(x, z, t)$ en la cual la mayoría de los términos contendrían al factor $\exp[i(\beta_o z - \omega_o t)]$. Cancelando este factor llegaríamos a una ecuación en la cual la mayoría de los términos describirían cambios “lentos” en comparación con $\exp[i(\beta_o z - \omega_o t)]$. Sin embargo, dicha ecuación también contendría algunos términos que oscilan muy rápidamente, por contener al factor $\exp[2i(\beta_o z - \omega_o t)]$. El efecto de dichos términos sobre el comportamiento de $\bar{E}(x, z, t)$ sería semejante al de una fluctuación al azar, que en un momento contribuye en un sentido y al momento siguiente contribuye en el sentido opuesto, de manera que el efecto neto es casi nulo [Newell y Moloney, pág. 313]. Por este motivo es posible despreciar estos

términos en la ecuación para $\bar{E}(x, z, t)$. De hecho, si se considera que (3.23) es tan sólo el primer término de una expansión asintótica [Copson 1965; Bender y Orszag 1978] para $E(x, z, t)$, resulta *necesario* desprestigiar los términos rápidamente oscilantes que aparecen en la ecuación para $\bar{E}(x, z, t)$, si queremos que dicha expansión sea uniforme.

Para no tener, pues, términos rápidamente oscilantes en la ecuación para $\bar{E}(x, z, t)$, debemos desprestigiar los términos de (3.24) que contienen el tercer armónico $3\omega_o$. Desprestigando estos términos vemos que la parte no lineal de la polarización puede escribirse en la forma:

$$P^{(NL)}(x, z, t) = \frac{1}{2} \bar{P}^{(NL)} \exp[i(\beta_o z - \omega_o t)] + c.c. \quad (3.25)$$

donde hemos definido:

$$\bar{P}^{(NL)}(x, z, t) = \frac{3}{4} \epsilon_o \chi^{(3)} |\bar{E}|^2 \bar{E}. \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.23), (3.25) y (3.26) en (3.20) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \bar{E}_{xx} + \bar{E}_{zz} + 2i\beta_o \bar{E}_z - \beta_o^2 \bar{E} - \mu_o \epsilon_L \bar{E}_{tt} + \\ & + 2i\mu_o \epsilon_L \omega_o \bar{E}_t + \mu_o \epsilon_L \omega_o^2 \bar{E} - \frac{3}{4} \mu_o \epsilon_o \chi^{(3)} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_{tt} + \\ & + \frac{3}{2} i \mu_o \epsilon_o \omega_o \chi^{(3)} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_t + \frac{3}{4} \mu_o \epsilon_o \omega_o^2 \chi^{(3)} |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si ahora elegimos $\beta_o^2 = \mu_o \epsilon_L \omega_o^2$ y desprestigiamos el término \bar{E}_{zz} (pues, como ya dijimos, estamos suponiendo que \bar{E} varía lentamente con z), la ecuación anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} & 2i\beta_o \bar{E}_z + \bar{E}_{xx} - \mu_o \epsilon_L \bar{E}_{tt} + 2i\mu_o \epsilon_L \omega_o \bar{E}_t - \frac{3}{4} \mu_o \epsilon_o \chi^{(3)} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_{tt} + \\ & + \frac{3}{2} i \mu_o \epsilon_o \omega_o \chi^{(3)} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_t + \frac{3}{4} \mu_o \epsilon_o \omega_o^2 \chi^{(3)} |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Esta ecuación es importante ya que, como veremos a continuación, a partir de ella podemos obtener dos versiones de la ecuación NLS, a las que llamaremos “ecuación NLS espacial” y “ecuación NLS temporal”.

Consideremos primeramente el caso particular en que \bar{E} sea independiente de t . En ese caso (3.28) se reduce inmediatamente a la ecuación NLS en su forma “espacial”:

$$i \bar{E}_z + \frac{1}{2\beta_o} \bar{E}_{xx} + \gamma |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \quad (3.29)$$

en la cual hemos definido:

$$\gamma = \frac{3}{8} \frac{\mu_o \varepsilon_o \omega_o^2 \mathcal{X}^{(3)}}{\beta_o}. \quad (3.30)$$

El adjetivo “espacial” nos recuerda que en esta ecuación las variables independientes son variables espaciales (z y x) y que el tiempo no aparece en esta ecuación. Podemos escribir (3.30) en forma adimensional si hacemos los cambios de variables siguientes:

$$x \rightarrow x_o x, \quad (3.31)$$

$$z \rightarrow x_o^2 \beta_o z, \quad (3.32)$$

$$\bar{E} \rightarrow (\gamma \beta_o x_o^2)^{-1/2}$$

donde x_o es una distancia característica del sistema que estemos considerando. Con estos cambios de variables (3.29) toma la forma adimensional:

$$i u_z + \frac{1}{2} u_{xx} + |u|^2 u = 0. \quad (3.34)$$

Como veremos con más detalle en el capítulo siguiente, esta ecuación acepta soluciones de la forma:

$$u(x, z) = 2q \operatorname{sech}(2qx) \exp(2iq^2 z) \quad (3.35)$$

donde q es una constante arbitraria y esta expresión implica que la componente y del campo eléctrico será de la forma:

$$E(x, z, t) = \frac{1}{2} A \operatorname{sech}(Bx) \exp[i(Cz - \omega_o t)] \quad (3.36)$$

donde A , B , C y ω_o son constantes. Podemos ver que esta expresión describe a una onda eléctrica que avanza en la dirección z y que tiene un perfil transversal (en la dirección x) que no cambia al aumentar z . Es decir, la ecuación (3.36) describe un haz luminoso que avanza a través del dieléctrico sin ensancharse ni hacerse más angosto. Una onda así es lo que se conoce como un “solitón espacial”.

Consideremos ahora el caso en que \bar{E} sea independiente de x . En tal caso la ecuación (3.28) toma la siguiente forma:

$$2i\beta_o \bar{E}_z + 2i\mu_o \varepsilon_L \omega_o \bar{E}_t - \mu_o \varepsilon_L \bar{E}_{tt} + \frac{3}{4} \mu_o \varepsilon_o \omega_o^2 \chi^{(3)} \left[|\bar{E}|^2 \bar{E} + \frac{2i}{\omega_o} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_t - \frac{1}{\omega_o^2} (|\bar{E}|^2 \bar{E})_{tt} \right] = 0 \quad (3.37)$$

Ahora bien, si la variación en t es lenta (*i.e.*, cuando los pulsos duran más de 1 ps), de los tres términos que aparecen en el paréntesis cuadrado, el primero es el más importante. Además, si ω_o está en el infrarrojo (que es lo usual en telecomunicaciones), tendremos que $\omega_o^{-1} \approx 10^{-15} s$ y por lo tanto los coeficientes de los otros dos términos son extremadamente pequeños. Por lo tanto, en la descripción de pulsos de más de 1 ps de duración los dos últimos términos del paréntesis cuadrado pueden ser despreciados, con lo cual la ecuación (3.37) se reduce a:

$$i\bar{E}_z + i\frac{\mu_o \varepsilon_L \omega_o}{\beta_o} \bar{E}_t - \frac{\mu_o \varepsilon_L}{2\beta_o} \bar{E}_{tt} + \gamma |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0. \quad (3.38)$$

donde γ es el parámetro definido en (3.30).

Para entender mejor el significado de los coeficientes de los términos \bar{E}_t y \bar{E}_{tt} de la ecuación (3.38) conviene recordar que $\beta_o = (\mu_o \varepsilon_L)^{1/2} \omega_o$. Usando esto, (3.38) toma la forma:

$$i \bar{E}_z + i (\mu_o \varepsilon_L)^{1/2} \bar{E}_t - \frac{1}{2} \frac{(\mu_o \varepsilon_L)^{1/2}}{\omega_o} \bar{E}_{tt} + \gamma |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0, \quad (3.39)$$

y si ahora definimos una función $\beta(\omega)$ en la forma:

$$\beta(\omega) = \beta_o + (\mu_o \varepsilon_L)^{1/2} (\omega - \omega_o) + \frac{(\mu_o \varepsilon_L)^{1/2}}{2\omega_o} (\omega - \omega_o)^2 \quad (3.40)$$

la ecuación (3.39) puede escribirse así:

$$i (\bar{E}_z + \beta_1 \bar{E}_t) - \frac{\beta_2}{2} \bar{E}_{tt} + \gamma |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0, \quad (3.41)$$

donde hemos definido los parámetros β_1 y β_2 de la siguiente manera:

$$\beta_1 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} = \beta'(\omega_o), \quad (3.42)$$

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_o} = \beta''(\omega_o). \quad (3.43)$$

Para entender cuál es el significado de la función $\beta(\omega)$ observemos que:

$$\beta(\omega_o) = (\mu_o \varepsilon_L)^{1/2} \omega_o = \beta_o \quad (3.44)$$

donde β_o es el parámetro que introdujimos en (3.23), es decir, $\beta(\omega_o)$ es el número de onda dentro del dieléctrico correspondiente a la frecuencia ω_o . La función $\beta(\omega)$ tiene, pues, un significado físico claro e importante. En la literatura sobre óptica $\beta(\omega)$ es llamada usualmente *constante de propagación*.

La importancia de haber expresado los coeficientes de los términos \bar{E}_t y \bar{E}_{tt} que aparecen en (3.41) en función de las derivadas de $\beta(\omega)$ es que,

escrita en esta forma, la ecuación (3.41) es válida aún en condiciones más complicadas que las que aquí hemos considerado. En particular, (3.41) sigue siendo válida para describir la propagación de pulsos luminosos en una fibra óptica, sólo que allí el confinamiento del dieléctrico dentro de un cilindro impone condiciones de frontera que hacen que los coeficientes de la expansión en serie de Taylor de $\beta(\omega)$ tengan otros valores y que el campo \bar{E} , además de depender de z y t , dependa también de x y y .

Podemos simplificar la forma de la ecuación (3.41) si introducimos una nueva variable $T = t - \beta_1 z$ (a la que llamaremos “tiempo retardado”) y tomamos en cuenta que podemos considerar a $\bar{E}(z, t)$ como una función de la forma $\bar{E}(z, T(z, t))$, de modo que:

$$\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_z \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_z, \quad (3.44)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}\right)_T + \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_z \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_t = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}\right)_T - \beta_1 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_z, \quad (3.45)$$

lo cual implica que:

$$\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}\right)_t + \beta_1 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_z = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial z}\right)_T. \quad (3.46)$$

Usando las identidades (3.44) y (3.46) podemos ver que (3.41) se reduce a la ecuación NLS en su forma “temporal”:

$$i \bar{E}_z - \frac{\beta_2}{2} \bar{E}_{TT} + \gamma |\bar{E}|^2 \bar{E} = 0 \quad (3.47)$$

donde ahora hemos de considerar que $\bar{E} = \bar{E}(z, T)$. El adjetivo “temporal” nos recuerda que ahora el tiempo retardado T es una de las variables independientes.

En la ecuación (3.47) \bar{E} tiene unidades de campo eléctrico ($V m^{-1}$), β_2 se mide en $s^2 m^{-1}$ y γ tiene unidades de $m V^{-2}$. Si ahora llamamos S a un área característica del sistema que estemos considerando (en el caso de

fibras ópticas S podría ser la sección transversal de la fibra) y definimos una constante δ en la forma $\delta = (2/c\varepsilon_o S)^{1/2}$, podemos definir dos nuevas variables $A = \bar{E}/\delta$ y $\gamma' = \gamma\delta^2$. Sustituyendo estas expresiones en (3.47) vemos que $A(z,t)$ satisface la ecuación:

$$i A_z - \frac{\beta_2}{2} A_{TT} + \gamma' |A|^2 A = 0. \quad (3.48)$$

Ésta es nuevamente la ecuación NLS temporal, sólo que ahora la variable A se mide en $W^{1/2}$ y γ' se mide en $W^{-1}m^{-1}$. Usar estas variables resulta conveniente puesto que así $|A|^2$ nos da directamente la potencia de la onda (en watts).

Podemos también introducir las variables adimensionales:

$$u = \left(\frac{\gamma' T_o^2}{|\beta_2|} \right)^{1/2} A, \quad \xi = \frac{|\beta_2|}{T_o^2} z, \quad \tau = T/T_o \quad (3.49)$$

donde T_o es un tiempo característico del sistema que estemos considerando (T_o podría ser, por ejemplo, la duración de los pulsos luminosos que viajan por una fibra óptica). En términos de estas variables (3.48) toma la forma usual (adimensional) de la ecuación NLS temporal:

$$i u_\xi - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} u_{\tau\tau} + |u|^2 u = 0 \quad (3.50)$$

en la cual $\text{sgn}(\beta_2) = 1$ si $\beta_2 > 0$, $\text{sgn}(\beta_2) = -1$ si $\beta_2 < 0$ y $\text{sgn}(\beta_2) = 0$ si $\beta_2 = 0$.

Si ahora comparamos las versiones “espacial” (3.34) y “temporal” (3.50) de la ecuación NLS, podremos ver que hay una diferencia importante. En el caso espacial la frecuencia ω_o de la onda portadora no afecta los signos de los coeficientes de la ecuación (3.36). En cambio, en el caso temporal la frecuencia de la portadora sí determina el signo del coeficiente del término dispersivo $u_{\tau\tau}$, ya que el signo del parámetro $\beta_2 = \beta''(\omega_o)$ sí depende, en general, del valor de ω_o . Este detalle es sumamente importante, ya que como mostraremos más adelante, (3.50) tiene soluciones de la forma:

$$u(\xi, \tau) = 2q \operatorname{sech}(2q\tau) \exp(2iq^2\xi) \quad (3.51)$$

únicamente en el caso en que $\operatorname{sgn}(\beta_2) = -1$ (i.e., si $\beta_2 < 0$). En el caso en que $\beta_2 > 0$ la ecuación (3.59) no permite la propagación de pulsos luminosos que avancen por el material sin perder su forma.

En la práctica es más común expresar a β_2 como función de la longitud de onda de la portadora (en lugar de darla en función de la frecuencia). En el caso de las fibras ópticas de SiO_2 se encuentra que $\beta_2 > 0$ si $\lambda < 1.27 \mu\text{m}$ y $\beta_2 < 0$ cuando $\lambda > 1.27 \mu\text{m}$. Por lo tanto, para poder transmitir solitones ópticos a lo largo de estas fibras, es necesario usar láseres con longitudes de onda superiores a $1.27 \mu\text{m}$. Estas longitudes de onda se encuentran en el infrarrojo, ya que la porción visible del espectro electromagnético se encuentra entre $0.39 \mu\text{m}$ y $0.78 \mu\text{m}$. Los sistemas modernos de telecomunicaciones trabajan con $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, que es la longitud de onda para la cual el SiO_2 resulta más transparente, es decir, ésta es la longitud *de mínima atenuación*. Es conveniente observar que resulta sumamente afortunado que la longitud de mínima atenuación para el SiO_2 ($\lambda = 1.55 \mu\text{m}$) caiga en la zona en que $\beta_2 < 0$ (i.e., en la zona en que $\lambda > 1.27 \mu\text{m}$), pues de esta forma la propagación de solitones ópticos (que sólo es posible si $\beta_2 < 0$) puede lograrse con la mínima atenuación posible.

Capítulo 4

Secantes y tangentes hiperbólicas

En el capítulo anterior mencionamos que la ecuación NLS temporal:

$$i u_z - \frac{\operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} u_{tt} + |u|^2 u = 0 \quad (4.1)$$

en el caso en que $\operatorname{sgn}(\beta_2) = -1$, tiene soluciones de la forma:

$$u(z, t) = 2q \operatorname{sech}(2qt) \exp(2iq^2 z) \quad (4.2)$$

donde q es una constante real arbitraria. Sin embargo, no hemos dicho cómo se encuentran las soluciones (4.2) de la ecuación (4.1). Lo que se hace es proponer una solución de la forma:

$$u(z, t) = s(t) \exp(ipz)$$

donde $s(t)$ y p son cantidades reales y sustituir esto en (4.1), con lo cual se obtiene:

$$s'' = 2 \operatorname{sgn}(\beta_2)(s^3 - ps) = -\frac{d}{ds} \operatorname{sgn}(\beta_2) \left(-\frac{1}{2} s^4 + ps^2 \right)$$

Ahora observamos que esta ecuación puede verse como la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria, moviéndose en una dimensión bajo la acción del potencial:

$$U(s) = \text{sgn}(\beta_2) \left(-\frac{1}{2} s^4 + ps^2 \right). \quad (4.5)$$

Esta expresión muestra que si buscamos soluciones para $s(t)$ tipo “solitón”, es decir, soluciones localizadas y acotadas, y tales que $s(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$, p debe ser positiva, ya que de lo contrario el potencial sería cualitativamente similar a la Fig. 4.1 (a) si $\beta_2 > 0$, en cuyo caso $|s(t)|$ crecería sin límite, o similar a la Fig. 4.1 (b) si $\beta_2 < 0$, donde $s(t)$ sería oscilatoria.

Suponiendo que $p > 0$, el potencial $U(s)$ tendrá la forma mostrada en la Fig. 4.1 (c) si $\beta_2 > 0$ y será similar a la Fig. 4.1 (d) si $\beta_2 < 0$.

En el caso en que $p > 0$ y $\beta_2 > 0$ las características esenciales de la función $s(t)$ dependen de la energía total E de la partícula. Si $E > U_m$, donde U_m es el valor máximo del potencial, $s(t)$ irá desde $-\infty$ hasta ∞ , o viceversa. Si $E < U_m$, $s(t)$ podría permanecer oscilando alrededor de $s = 0$, o bien $|s(t)|$ podría crecer sin límites. Finalmente, si $E = U_m$, $s(t)$ irá desde $-s_m$ hasta s_m , donde $\pm s_m$ son los valores donde $U(s)$ es máxima y en tal caso la forma precisa de $s(t)$ se determinará un poco más adelante.

En el caso en que $p > 0$ y $\beta_2 < 0$ las características esenciales de $s(t)$ también dependen del valor de E . Si $E > 0$ la función $s(t)$ oscilará alrededor de $s = 0$. Si $-U_m < E < 0$, $s(t)$ oscilará entre dos valores negativos, o entre dos valores positivos. Finalmente, si $E = 0$, $s(t)$ irá desde $s = 0$ hasta un valor máximo s_0 (o un valor mínimo $-s_0$) y luego regresará a $s = 0$, de manera que en este caso (y sólo en este caso) $s(t)$ sí describe a una onda solitaria.

Para determinar la forma de la onda solitaria mencionada arriba, escribamos la ecuación de movimiento (4.4) como una ecuación de conservación de energía (considerando que $\beta_2 < 0$):

$$\frac{1}{2} (s')^2 + \left(\frac{1}{2} s^4 - ps^2 \right) = E = 0. \quad (4.6)$$

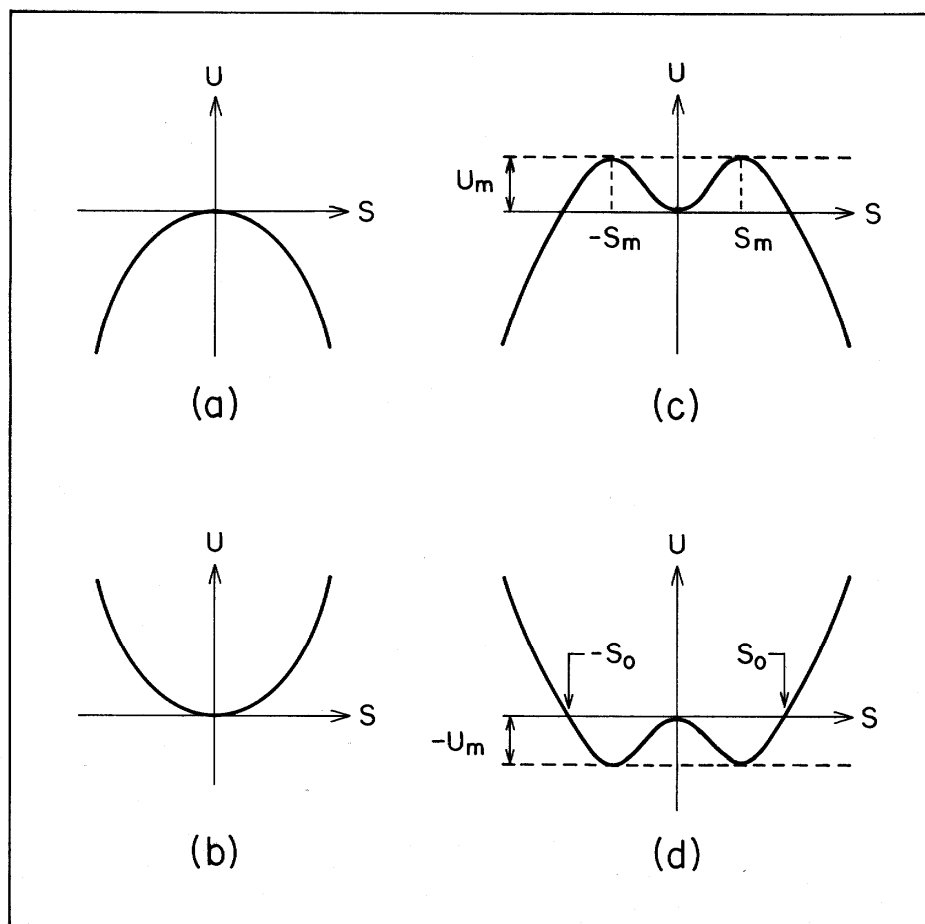


Fig. 4.1 Comportamiento cualitativo del potencial (4.5) en los cuatro casos siguientes: (a) $p > 0$ y $\beta_2 > 0$, (b) $p > 0$ y $\beta_2 < 0$, (c) $p > 0$ y $\beta_2 > 0$, (d) $p > 0$ y $\beta_2 < 0$.

De esta ecuación se sigue que:

$$\frac{ds}{dt} = (-s^4 + 2ps^2)^{1/2}$$

y por lo tanto:

$$t = \int \frac{ds}{(-s^4 + 2ps^2)^{1/2}}.$$

Si ahora definimos $w^2 = 2p$ (cosa que es posible ya que $p > 0$), podemos escribir:

$$t = \int \frac{ds}{(w^2 s^2 - s^4)^{1/2}}$$

y si hacemos el cambio de variable $ws = 1/x$, obtenemos:

$$t = -\int \frac{dx}{wx^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{w^4 x^4} \right)^{1/2}} = -\int \frac{w dx}{(w^4 x^2 - 1)^{1/2}}$$

Ahora introducimos en la ecuación anterior el nuevo cambio de variable $w^2 x = \cosh y$, con lo cual obtenemos:

$$t = -\frac{1}{w} \int \frac{\sinh y}{\pm \sinh y} dy = \pm \frac{1}{w} y = \pm \frac{1}{w} \operatorname{Arcosh}(w^2 x) = \pm \frac{1}{w} \operatorname{Arcosh}\left(\frac{w}{s}\right). \quad (4.7)$$

Si ahora tomamos el signo positivo enfrente de la función $\operatorname{Arcosh}(w/s)$ y usamos la poco conocida identidad $\operatorname{Arcosh}(w/s) = \operatorname{Arsech}(s/w)$ [Gradshteyn y Ryzhik p. 61], obtenemos:

$$\operatorname{Arsech}(s/w) = wt$$

lo cual implica:

$$s = w \operatorname{sech}(wt).$$

Sustituyendo esta igualdad en (4.3) y recordando que $w^2 = 2p$ llegamos a la expresión:

$$u(z, t) = w \operatorname{sech}(wt) \exp(iw^2 z / 2).$$

Finalmente, si definimos $w = 2q$, obtenemos la forma del solitón que mencionamos en el capítulo anterior:

$$u(z, t) = 2q \operatorname{sech}(2qt) \exp(2iq^2 z). \quad (4.8)$$

En el caso en que $p > 0$ y $\beta_2 > 0$ tenemos que el potencial:

$$U(s) = ps^2 - \frac{1}{2}s^4$$

alcanza su máximo en $\pm sp = \pm p^{1/2}$ y dicho valor máximo es $U_m = p^2 / 2$. La ecuación de conservación de energía es, en este caso:

$$\frac{1}{2}(s')^2 + \left(ps^2 - \frac{1}{2}s^4 \right) = E$$

y si tomamos $E = U_m = p^2 / 2$, esta ecuación toma la forma:

$$\frac{ds}{dt} = (s^4 - 2ps^2 + p^2)^{1/2} = \pm(s^2 - p) = m(p - s^2) \quad (4.9)$$

de manera que:

$$t = \pm \int \frac{ds}{ps^2} = \pm \frac{1}{p^{1/2}} \int \frac{d(s/p^{1/2})}{1 - s^2/p} = \pm \frac{1}{p^{1/2}} \operatorname{Artanh}(s/p^{1/2})$$

Finalmente, tomando el signo positivo enfrente de la función $Artanh(s/p^{1/2})$, obtenemos:

$$s = p^{1/2} \tanh(p^{1/2}t) \quad (4.10)$$

y sustituyendo esto en (4.3) obtenemos la solución de (4.1) correspondiente al caso en que $\beta_2 > 0$:

$$u(z,t) = p^{1/2} \tanh(p^{1/2}t) \exp(ipz). \quad (4.11)$$

Notemos que esta ecuación implica que $|u(z,t)|^2$ será una función aproximadamente constante (cercana a $p^{1/2}$) a lo largo de la mayor parte del eje t , salvo en la zona central (cercana a $t = 0$), donde tiene una depresión. Esto corresponde a tener una fibra óptica completamente iluminada, con excepción de una zona oscura que avanza por la fibra. Debido a esto, a las soluciones de la ecuación NLS con $\beta_2 > 0$ de la forma (4.11) se les llama “solitones oscuros” (“dark solitons”), para diferenciarlos de los “solitones brillantes” (“bright solitons”) de la forma (4.8), que se encuentran cuando $\beta_2 < 0$.

Es posible encontrar expresiones un poco más generales que las ecuaciones (4.8) y (4.11) para describir solitones brillantes y oscuros, respectivamente, si en lugar del cambio de variable (4.3), proponemos:

$$u(z,t) = s(t - cz) \exp[i(az + bt)]. \quad (4.12)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.1) y suponiendo que $\text{sgn}(\beta_2) = -1$, se llega al solitón brillante [Abdullaev pp. 6-8]:

$$u(z,t) = 2q \operatorname{sech}[2q(t - 2rz)] \exp[i(2(q^2 - r^2)z + 2rt)] \quad (4.13)$$

donde hemos definido $r = c/2$ y $q^2 = (2a + c^2)/4$. En forma similar, si suponemos que $\text{sgn}(\beta_2) = +1$, se llega al solitón oscuro [Abdullaev p. 152]:

$$u(z,t) = p^{1/2} \tanh [p^{1/2}(t - 2rz)] \exp [i \{ (p + 2r^2)z - 2rt \}] \quad (4.14)$$

donde $r = c/2$ y $p = (2a - c^2)/2$.

Capítulo 5

Los cuatro casos posibles

Tomemos nuevamente la ecuación NLS temporal (3.48):

$$iA_z - \frac{\beta_2}{2} A_{TT} + \gamma' |A|^2 A = 0 \quad (5.1)$$

recordando que A se mide en $W^{1/2}$, γ' en $W^{-1} \text{ km}^{-1}$, T en ps y β_2 en $\text{ps}^2 \text{ km}^{-1}$.

Consideremos ahora a un pulso luminoso viajando por una fibra óptica, cuya amplitud inicial (en $z = 0$) sea $P_0^{1/2} = |A(0,0)|$, su anchura inicial (a lo largo del eje T) sea T_0 y definamos las nuevas variables U y τ mediante las ecuaciones:

$$A = P_0^{1/2} U \quad \text{y} \quad T = T_0 \tau. \quad (5.2)$$

En términos de estas variables adimensionales (5.1) toma la forma:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (5.3)$$

donde hemos definido la *longitud de dispersión* L_D y la *longitud no lineal* L_{NL} en la forma:

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad \text{y} \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma' P_0} \quad (5.4)$$

La ecuación (5.4) muestra que la forma del pulso podría modificarse al avanzar a lo largo de la fibra debido a dos procesos: uno dispersivo y otro no lineal. Si estos dos procesos no existieran (o fueran despreciables) el pulso viajaría por la fibra sin deformarse (pues tendríamos $U_z = 0$). Para ver en

qué casos podrían despreciarse estos procesos, notemos que la ecuación (5.4) implica que el cambio ΔU en la forma del pulso, asociado a un avance $\Delta z = L$ a lo largo de la fibra, está dado aproximadamente por:

$$i\Delta U \approx \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{L}{L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{L}{L_{NL}} |U|^2 U. \quad (5.5)$$

Esta expresión muestra que el término dispersivo puede despreciarse si $L/L_D \ll 1$, mientras que el término no lineal podrá despreciarse cuando $L/L_{NL} \ll 1$. Esto implica que podemos tener cuatro posibles casos:

- 1) El caso trivial, en el cual $L \ll L_D$ y $L \ll L_{NL}$, de manera que la ecuación (5.3) se puede aproximar simplemente por la ecuación $U_z = 0$, la cual implica que el pulso no cambia de forma al avanzar por la fibra.
- 2) El caso dispersivo, en el cual $L \geq L_D$ pero $L \ll L_{NL}$, de manera que en (5.3) podemos despreciar el término no lineal y por lo tanto (5.1) puede aproximarse en la forma:

$$iA_z - \frac{\beta_2}{2} A_{TT} = 0. \quad (5.6)$$

- 3) El caso no lineal, en el cual $L \ll L_D$ pero $L \geq L_{NL}$, de modo que podemos despreciar el término dispersivo en (5.3) y por lo tanto (5.1) puede aproximarse en la forma:

$$iA_z + \gamma' |A|^2 A = 0. \quad (5.7)$$

- 4) El caso completo, en el cual $L \geq L_D$ y $L \geq L_{NL}$, de manera que no podemos despreciar ni el término dispersivo ni el término no lineal y por lo tanto debemos trabajar con la ecuación (5.1) completa.

Veamos ahora cuál de estos cuatro casos es el adecuado para describir la propagación de los pulsos luminosos en las fibras ópticas utilizadas en los sistemas telefónicos modernos.

Empecemos por indicar que los valores de β_2 y γ' correspondientes a una fibra típica trabajando en una longitud de onda de 1550nm, son aproximadamente los siguientes [Agrawal p. 53]:

$$\beta_2 = -20 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1} \quad \text{y} \quad \gamma' = 20 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1} .$$

Recordemos, además, que en el Capítulo 2 mencionamos que los sistemas telefónicos comerciales más rápidos hechos con fibras ópticas transmiten la información a una velocidad de 2.4 Gb/s, lo cual implica que a cada “bit” le corresponde aproximadamente un tiempo de 400 ps. Podemos considerar, por lo tanto, que $T_0 \approx 400$ ps.

Por otra parte, las fuentes luminosas utilizadas en los sistemas telefónicos pueden generar fácilmente pulsos con una potencia de 0.1 mW, de manera que podemos tomar $P_0 = 10^{-4} \text{ W}$.

Si consideramos, pues, que $T_0 = 400$ ps y $P_0 = 10^{-4} \text{ W}$, L_D y L_{NL} toman los siguientes valores:

$$L_D = \frac{(400 \text{ ps})^2}{20 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}} = 8000 \text{ km} \quad \text{y} \quad L_{NL} = \frac{1}{(20 \text{ W}^{-1} \text{ km}^{-1})(10^{-4} \text{ W})} = 500 \text{ km} .$$

Finalmente, si recordamos que en el Capítulo 2 mencionamos que las señales luminosas que viajan por una fibra óptica pueden recorrer entre 30 y 50 km sin necesidad de repetidores intermedios, veremos que $L=50$ km es un valor razonable desde el punto de vista de las telecomunicaciones.

Vemos, pues, que para pulsos de 400 ps de duración y 0.1 mW de potencia, se cumplen las desigualdades $L \ll L_D$ y $L \ll L_{NL}$, que corresponden al caso trivial en el cual es posible despreciar tanto el término dispersivo como el término no lineal en la ecuación (5.1). En este caso (el régimen lineal) los pulsos luminosos pueden propagarse por las fibras ópticas sin deformarse, aún cuando su perfil no tenga la forma de secante hiperbólica (que corresponde a los verdaderos solitones ópticos). Es por este motivo que al final del Capítulo 2 mencionamos que en los sistemas telefónicos actuales todavía no era necesario el uso de verdaderos solitones ópticos como “bits” de información. Sin embargo, en el momento en que sea necesario aumentar un orden de magnitud el “bit-rate” de los sistemas telefónicos, utilizando pulsos luminosos de 40 ps de duración (en lugar de

los 400 ps que consideramos arriba) y se desee aumentar un orden de magnitud la potencia de los pulsos, utilizando así pulsos de 1 mW en lugar de 0.1 mW, L_D y L_{NL} tomarán los siguientes valores:

$$L_D = \frac{(40ps)^2}{20ps^2 km^{-1}} = 80km \quad \text{y} \quad L_{NL} = \frac{1}{(20W^{-1}km^{-1})(10^{-3}W)} = 50km,$$

de manera que en este caso L , L_D y L_{NL} serán del mismo orden de magnitud y ya no podremos despreciar ni el término dispersivo, ni el término no lineal en la ecuación (5.1). En estas condiciones; la propagación de los pulsos luminosos a través de las fibras ópticas estará forzosamente descrita por la ecuación (5.1) completa y por lo tanto los únicos pulsos (con $T_o \leq 40 ps$ y $P_o \geq 1 mW$) que podrán propagarse sin distorsión por las fibras ópticas serán los solitones de (5.1).

Naturalmente podemos también considerar pulsos con $T_o \leq 40 ps$ y $P_o \leq 0.1 mW$, en cuyo caso la evolución de los pulsos estará descrita por (5.6), o bien pulsos con $T_o \geq 400 ps$ y $P_o \geq 1 mW$, en cuyo caso (5.11) será la que describa el comportamiento de los pulsos. En los Capítulos 6 y 7 veremos cómo se comportan las soluciones de estas dos ecuaciones.

Hemos visto que para describir la propagación de los pulsos luminosos utilizados en los sistemas telefónicos actuales no es necesario considerar el término dispersivo de la ecuación (5.1), ya que dichos pulsos tienen una duración aproximada de 400 ps, mientras que el término dispersivo sólo es necesario para describir el comportamiento de pulsos más rápidos, esto es, pulsos de menos de 40 ps de duración. Podríamos ahora preguntarnos si en realidad es posible producir pulsos tan rápidos. La respuesta es *sí*. Recordemos que desde el Capítulo 1 mencionamos que desde 1980 Mollenauer, Stolen y Gordon lograron producir solitones ópticos de 7 ps de duración, utilizando un láser con una longitud de onda de $1.55\mu m$. Posteriormente se han producido pulsos aún más rápidos. En 1988, por ejemplo, se lograron generar pulsos de $18 fs = 0.018 ps$ utilizando un láser de $1.32\mu m$ [Agrawal p. 168]. Estos rapidísimos pulsos están ya en el límite de lo posible, ya que una onda electromagnética con $\lambda = 1.32\mu m$ tiene un período de 4.4 fs, de manera que un pulso de 18 fs apenas si contiene cuatro

períodos de la onda portadora, lo cual ya es en realidad insuficiente para definir claramente la forma del pulso.

Para finalizar este capítulo quisiéramos mencionar que actualmente ya se prevee que en un futuro no muy lejano los sistemas de telecomunicaciones deberán ser capaces de transmitir información digital a velocidades del orden de cientos de “gigabits” por segundo [Gabitov *et al.* 1997]. Por lo tanto, si estos “bits” de información son solitones ópticos, la duración de dichos solitones deberá ser menor o igual a 10 ps. Es importante señalar que para pulsos más rápidos (del orden de 1 ps, o aún más rápidos) entran en juego otros efectos dispersivos y no lineales que hacen que el comportamiento de dichos pulsos difiera del de los solitones de la ecuación NLS.

Capítulo 6

El caso dispersivo y el efecto GVD

Examinemos ahora cómo se comporta un pulso luminoso cuya evolución esté gobernada por la ecuación (5.6):

$$iA_z - \frac{\beta_2}{2} A_{TT} = 0. \quad (6.1)$$

Con el fin de resolver esta ecuación, tomemos su transformada de Fourier (con respecto a T), recordando que la transformada de A_T es $-i\omega\tilde{A}$, donde:

$$\tilde{A}(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z, T) e^{i\omega T} dT. \quad (6.2)$$

Así pues, de (6.1) se sigue que:

$$i\tilde{A}_z - \frac{\beta_2}{2} (-i\omega)^2 \tilde{A} = 0$$

cuya solución es:

$$\tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(0, \omega) \exp\left(i \frac{\beta_2 \omega^2}{2} z\right).$$

Aplicando la transformada inversa obtenemos:

$$\begin{aligned} A(z, T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(0, \omega) \exp\left[i\left(\frac{\beta_2 z}{2} \omega^2 - T\omega\right)\right] d\omega. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Esta ecuación muestra que para calcular $A(z, T)$ necesitamos dar la forma de $\tilde{A}(0, \omega)$ y para calcular esta función necesitamos elegir el perfil inicial $A(0, T)$. Consideremos el caso de un perfil gaussiano:

$$A(0, T) = \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right). \quad (6.4)$$

A la mitad de su altura máxima su anchura es igual a $2T_0(2 \ln 2)^{1/2} \approx 2.35 T_0$, de manera que el valor de T_0 se aproxima a la mitad de la anchura del pulso.

La expresión (6.4) implica que:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(0, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2} + i\omega T\right) dT \\ &= \exp\left(-\frac{\omega^2 T_0^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{T}{\sqrt{2}T_0} - \frac{i\omega T_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right] dT \\ &= \exp\left(-\frac{\omega^2 T_0^2}{2}\right) \sqrt{2} T_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \\ &= (2\pi)^{1/2} T_0 \exp\left(-\frac{\omega^2 T_0^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Sustituyendo esta expresión en (6.3) obtenemos:

$$A(z, T) = \frac{T_0}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{T_0^2}{2} \omega^2\right) \exp\left[i\left(\frac{\beta_2 z}{2} \omega^2 - T\omega\right)\right] d\omega.$$

Completando el binomio cuadrado en el argumento de la exponencial compleja y procediendo de manera similar a como obtuvimos (6.5), o bien descomponiendo el integrando en sus partes real e imaginaria y buscando las

integrales resultantes en una tabla de integrales [Gradshteyn y Ryzhik p. 485], se obtiene:

$$A(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{T_0^2 T^2}{2(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)}\right] \exp\left[i\left\{\frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{\beta_2 z}{T_0^2} - \frac{\beta_2 z T^2}{2(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)}\right\}\right] \quad (6.6)$$

Esta expresión se puede escribir de manera más compacta con ayuda de la identidad:

$$\frac{1}{x - iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (6.7)$$

Utilizando (6.7) la expresión (6.6) resulta:

$$A(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right] \exp\left(i \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right). \quad (6.8)$$

Esta expresión se puede reducir aún más si observamos que:

$$(x + iy)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/4} \exp\left(i \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{y}{x}\right)$$

lo cual, con ayuda de (6.7), nos permite obtener la siguiente identidad:

$$\exp\left(i \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{y}{x}\right) = \frac{(x^2 + y^2)^{1/4}}{(x - iy)^{1/2}}$$

Utilizando esta identidad, (6.8) toma la forma:

$$A(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^2 - i\beta_2 z)^{1/2}} \exp\left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right]. \quad (6.9)$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación (3.2.9) del texto de Agrawal, veremos que no concuerdan, lo cual indica que una de las dos expresiones es

errónea. Si sustituimos ambas funciones en (6.1) podemos comprobar que la expresión (6.9) es la solución correcta.

La expresión (6.9) es mucho más compacta que (6.6). Sin embargo, para entender geoméricamente cómo evoluciona el pulso (6.4) conforme va avanzando por la fibra óptica, es más transparente la expresión (6.6), ya que ésta nos da a la función $A(z, T)$ en la forma:

$$A(z, T) = |A(z, t)| \exp[i\theta(z, t)]$$

de manera que el módulo $|A(z, t)|$ es claramente visible en (6.6) y esto es importante, ya que $|A(z, t)|$ nos da la forma (la envolvente) del pulso luminoso. De (6.6) tenemos que:

$$\begin{aligned} |A(z, t)| &= \frac{T_0}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)^{1/4}} \exp \left[-\frac{T^2}{2T_0^4 \left(1 + \frac{\beta_2^2}{T_0^4} z^2\right)} \right] \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{L_D^2}\right)^{1/4}} \exp \left[-\frac{T^2}{2T_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{L_D^2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

si recordamos que $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$. Esta expresión muestra que el pulso se va dispersando, pues conforme z aumenta, su altura va disminuyendo y su anchura va aumentando, ya que en lugar del ancho inicial T_0 tenemos ahora $T_0 \left(1 + z^2 / L_D^2\right)^{1/2}$. Podemos ver que la dispersión del pulso depende del valor absoluto de β_2 y no de su signo, lo cual es comprensible ya que el pulso se ensanchará igualmente ya sea que las frecuencias corridas al rojo viajen más rápido que las corridas al azul ($\beta_2 > 0$) o viceversa.

Para entender por qué $\beta_2 > 0$ implica que las frecuencias corridas al rojo viajan más rápido que las frecuencias corridas al azul recordemos que

$\beta_1 = \beta'(\omega)$ y $\beta_2 = \beta''(\omega)$, donde $\beta(\omega)$ es el número de onda dentro del dieléctrico (y las primas indican derivadas). Esto implica que β_1^{-1} es la velocidad de grupo, es decir, $\beta_1 = 1/v_g$, de manera que:

$$\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega}$$

lo cual puede escribirse en la forma:

$$\frac{dv_g}{d\omega} = -v_g^2 \beta_2(\omega).$$

Esta ecuación nos muestra que si tenemos un paquete de ondas centrado en una frecuencia ω en la cual β_2 sea positiva, tendremos que $dv_g/d\omega$ será negativa y por lo tanto las componentes del paquete con frecuencias mayores que ω (*i.e.*, las componentes corridas al azul) viajarán más lento que las componentes con frecuencias menores que ω (*i.e.*, las componentes corridas al rojo). Lo contrario pasará si $\beta_2(\omega) < 0$. En ambos casos el paquete se dispersará debido a que las componentes del paquete con distintas frecuencias avanzan a distinta velocidad. La dispersión es llamada “normal” si $\beta_2(\omega) > 0$ y “anómala” en el caso contrario. Si $\beta_2(\omega_D) = 0$ se dice que ω_D es la *frecuencia de cero dispersión*.

Una onda con frecuencia ω_D viajando por una fibra óptica se propaga con una longitud de onda específica λ_D , denominada *longitud de onda de cero dispersión*. Esta es la longitud de onda *en la fibra* y no debe confundirse con la longitud de onda $2\pi c/\omega_D$ que tendría una onda de frecuencia ω_D propagándose en el vacío. Para una fibra óptica típica $\lambda_D \approx 1300$ nm [Hecht p. 68; Agrawal p. 9] y $\beta_2(\omega) < 0$ cuando $\lambda > \lambda_D$.

Notemos ahora que la expresión (6.6) muestra que conforme z aumenta no sólo la altura y la anchura del pulso se van modificando, sino también su fase $\theta(z, t)$, la cual es una función relativamente complicada de z y T :

$$\theta(z, T) = \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{\beta_2 z}{T_0^2} - \frac{\beta_2 z T^2}{2(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)}. \quad (6.11)$$

Para entender mejor cómo afecta esta función a la estructura del pulso luminoso, conviene regresar a la variable t original, recordando que $T = t - \beta_1 z$, de manera que:

$$T^2 = t^2 - 2\beta_1 z t + \beta_1^2 z^2.$$

Sustituyendo esta expresión en (6.11) obtenemos:

$$\theta(z,t) = -\frac{\beta_2 z t^2}{2(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)} + \frac{\beta_1 \beta_2 z^2 t}{(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)} - \frac{\beta_1^2 \beta_2 z^3}{2(T_0^4 + \beta_2^2 z^2)} + \frac{1}{2} \text{Arc tan} \frac{\beta_2 z}{T_0^2}$$

y como $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$, la ecuación anterior puede escribirse en la forma:

$$\theta(z,t) = -\frac{z}{2\beta_2(z^2 + L_D^2)}(t^2 - 2\beta_1 z t + \beta_1^2 z^2) + \frac{1}{2} \text{sgn}(\beta_2) \text{Arc tan} \frac{z}{L_D}. \quad (6.12)$$

Recordemos, por otra parte, que la relación entre la función $A(z,T) = |A(z,t)| \exp[i\theta(z,t)]$ y el campo eléctrico está dado por la ecuación:

$$\begin{aligned} E(x,y,z,t) &= \frac{1}{2} F(x,y) A(z,t) \exp(\beta_0 z - \omega_0 t) + c.c. \\ &= \frac{1}{2} F(x,y) |A(z,t)| \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t + \theta(z,t))] + c.c. \\ &= \frac{1}{2} |E(x,y,z,t)| \exp[i\phi(z,t)] + c.c. \end{aligned} \quad (6.13)$$

de modo que la frecuencia de la onda portadora es la siguiente [Newell y Moloney p. 41]:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega_0 + \frac{z}{\beta_2(z^2 + L_D^2)}(t - \beta_1 z). \quad (6.14)$$

Esta expresión muestra que con la condición inicial (6.4) la frecuencia de la onda portadora aumenta (disminuye) linealmente con el tiempo si $\beta_2 > 0$ ($\beta_2 < 0$). Esto es comprensible, ya que si $\beta_2 > 0$ las componentes de Fourier del pulso luminoso corridas hacia el rojo viajan más rápido que las componentes corridas al azul, por lo cual un observador situado en un punto determinado de la fibra ve llegar primero las componentes rojas y después las azules, es decir, ve que la frecuencia va aumentando con el tiempo. Lo contrario ocurrirá si $\beta_2 < 0$.

Diremos que en un pulso luminoso cuya onda portadora tenga una frecuencia dependiente del tiempo es un pulso con una “variación continua de frecuencia”. Si la frecuencia aumenta (disminuye) con el tiempo diremos que la variación de frecuencia es positiva (negativa) y si la frecuencia varía linealmente con el tiempo –como en el caso de la ecuación (6.14)– diremos que tenemos una variación de frecuencia lineal. En la literatura en inglés se utiliza el término “chirp” para denotar lo que nosotros hemos llamado “variación continua de frecuencia” y a los pulsos que presentan una variación de frecuencia de este tipo se les denomina “chirped”.

La ecuación (6.14) muestra que un pulso luminoso descrito por una función $A(z, T) = |A(z, t)| \exp[i\theta(z, t)]$ presentará una variación de frecuencia lineal si $\partial\theta / \partial t$ es lineal en t , o equivalentemente, si $\partial\theta / \partial T$ es lineal en T . La variación será positiva si $-\partial\theta / \partial T > 0$ y negativa en caso contrario.

Por lo dicho en los párrafos anteriores, podemos ver que la variación de frecuencia lineal provino del término proporcional a $-\beta_2 T^2$ que aparece en la fase (6.11). Esto implica que si a un pulso gaussiano de la forma (6.4) le añadimos un factor de la forma $\exp(-iCT^2 / 2T_0^2)$, el pulso resultante:

$$A(0, T) = \exp\left[-(1+iC)\frac{T^2}{2T_0^2}\right] \quad (6.15)$$

describirá a un pulso gaussiano con una variación de frecuencia lineal. La variación será positiva si $C > 0$, negativa en caso contrario.

Pensemos ahora cómo será la solución de la ecuación (6.1) correspondiente a la condición inicial (6.15). Supongamos, por ejemplo, que $C > 0$, de manera que el pulso inicial tenga una variación de frecuencia positiva, con las ondas corridas al rojo llegando antes que las ondas corridas

al azul. Ahora bien, al avanzar en la dirección z el factor β_2 empezará a provocar una variación de frecuencia adicional. Si $\beta_2 > 0$ la variación se hará aún más positiva y las ondas corridas al rojo se adelantarán todavía más a las ondas corridas al azul, por lo que el pulso se ensanchará. En cambio, si $\beta_2 < 0$, las ondas corridas al azul, que inicialmente venían retrasadas, irán ganando terreno, viajando más rápido que las ondas corridas al rojo, lo cual hará que el pulso se comprima inicialmente, para posteriormente empezar a ensancharse.

En el caso en que $C < 0$ sucede lo contrario. La variación de frecuencia negativa inicial se hará aún más negativa (al aumentar z) si $\beta_2 < 0$ y en tal caso el pulso se ensanchará. En cambio, la variación de frecuencia producida por un factor $\beta_2 > 0$ tenderá a cancelar la variación inicial, por lo cual el pulso empezará comprimiéndose, para después comenzar a ensancharse.

Tenemos, pues, que la solución de la ecuación (6.1) correspondiente a una condición inicial de la forma (6.15) describe a un pulso luminoso con una variación de frecuencia inicial, que se ensanchará conforme z aumente si $\beta_2 C > 0$ y se comprimirá inicialmente (para después ensancharse) si $\beta_2 C < 0$.

Por lo dicho anteriormente, queda claro que la presencia de una variación de frecuencia lineal (“chirp”) en la solución de (6.1) correspondiente a la condición inicial (6.4), es una de las características más importantes de dicha solución. Resulta, pues, natural preguntarse si otras condiciones iniciales localizadas (distintas a una gaussiana) darán también lugar a soluciones con chirp. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y es posible demostrarlo usando el método de *fase estacionaria* [Bender y Orszag 1978; Copson 1965; Zvérev 1978]. Como veremos a continuación, este método nos permite estimar el comportamiento asintótico de la expresión (6.3) para tiempos (y distancias) grandes.

Notemos que (6.3) es una integral de la forma:

$$A(z, T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp \left[iT \left(a \frac{z}{T} \omega^2 - \omega \right) \right] d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp [iT P(\omega)] d\omega \quad (6.16)$$

donde $a = \beta_2 / 2$ y $P(\omega)$ es el polinomio:

$$P(\omega) = a \frac{z}{t} \omega^2 - \omega \equiv ab\omega^2 - \omega. \quad (6.17)$$

Si queremos ahora determinar el comportamiento asintótico dominante de la integral (6.16) para T grande, debemos empezar por determinar los “puntos estacionarios” de $P(\omega)$, es decir, los puntos en los cuales:

$$P'(\omega) = 2ab\omega - 1 = 0. \quad (6.18)$$

Esta ecuación muestra que en el caso que estamos considerando $P(\omega)$ tiene un único punto estacionario:

$$\omega_e = \frac{1}{2ab} = \frac{T}{\beta_2 z}. \quad (6.19)$$

Dividamos ahora la integral (6.16) en tres partes:

$$\begin{aligned} A(z, T) = & \int_{-\infty}^{\omega_e - \varepsilon} f(\omega) \exp[iT P(\omega)] d\omega + \int_{\omega_e - \varepsilon}^{\omega_e + \varepsilon} f(\omega) \exp[iT P(\omega)] d\omega \\ & + \int_{\omega_e + \varepsilon}^{\infty} f(\omega) \exp[iT P(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (6.20)$$

donde ε es una constante. Dado que los intervalos de integración de la primera y última de estas tres integrales no contienen puntos estacionarios, el llamado *lema de Riemann-Lebesgue* [Bender y Orszag p. 278] nos dice que si $|f(\omega)|$ es integrable, el comportamiento asintótico dominante de $A(z, T)$ está determinado por la segunda integral, que es la que contiene al punto estacionario ω_e . Podemos aproximarnos al valor de esta integral si desarrollamos $P(\omega)$ en serie de Taylor alrededor de ω_e :

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P(\omega_e) + \frac{1}{2!} P''(\omega_e)(\omega - \omega_e)^2 \\ &= ab\omega_e^2 - \omega_e + ab(\omega - \omega_e)^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Utilizando esto, la segunda integral que vemos en (6.20) puede aproximarse así:

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_e - \varepsilon}^{\omega_e + \varepsilon} f(\omega) \exp[iT P(\omega)] d\omega &\approx \\
&\approx \int_{\omega_e - \varepsilon}^{\omega_e + \varepsilon} f(\omega) \exp\left[iT \left(ab\omega_e^2 - \omega_e + ab(\omega - \omega_e)^2\right)\right] d\omega \\
&= f(\omega_e) \exp\left[iT \left(ab\omega_e^2 - \omega_e\right)\right] \int_{\omega_e - \varepsilon}^{\omega_e + \varepsilon} \exp\left[iT ab(\omega - \omega_e)^2\right] d\omega \\
&= f(\omega_e) \exp\left[iT \left(ab\omega_e^2 - \omega_e\right)\right] \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[iT ab x^2\right] dx. \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Por último, si aproximamos la integral que aparece en el miembro derecho de (6.22) por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iT ab x^2) dx = \left(\frac{\pi}{-iT ab}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi i}{\beta_2 z}\right)^{1/2} \quad (6.23)$$

y observamos que:

$$T \left(ab\omega_e^2 - \omega_e\right) = -\frac{1}{2} \frac{T^2}{\beta_2 z} \quad (6.24)$$

llegamos a que el comportamiento asintótico de $A(z, T)$ para T grande es:

$$\begin{aligned}
A(z, T) &\rightarrow \int_{\omega_e - \varepsilon}^{\omega_e + \varepsilon} f(\omega) \exp[iT P(\omega)] d\omega \\
&\approx \left(\frac{2\pi i}{\beta_2 z}\right)^{1/2} f\left(\frac{T}{\beta_2 z}\right) \exp\left(-iT^2/2\beta_2 z\right). \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Esta expresión nos muestra que la fase de $A(z, T)$ tiene, en efecto, un término cuadrático en T , lo cual implica que la solución (6.3) sí tiene una variación de frecuencia lineal, que es lo que queríamos demostrar.

Podemos observar que en el caso particular en que tomemos la condición inicial gaussiana (6.4), la función $f(\omega)$ que aparece en (6.16) será:

$$f(\omega) = \frac{T_o}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{T_o^2 \omega^2}{2}\right) \quad (6.26)$$

y por lo tanto (6.25) tomará la forma:

$$\begin{aligned} A(z, T) &\rightarrow \left(\frac{i}{\beta_2 z}\right)^{1/2} T_o \exp\left(-\frac{T_o^2 T^2}{2\beta_2^2 z^2}\right) \exp(-iT^2 / 2\beta_2 z) \\ &= \frac{T_o}{(\beta_2 z)^{1/2}} \exp\left(-\frac{T_o^2 T^2}{2\beta_2^2 z^2}\right) \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{T^2}{2\beta_2 z}\right)\right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

que es precisamente a lo que tiende la expresión (6.6) cuando z es grande. Así pues, vemos que la expresión (6.25) nos permite recuperar la parte esencial de lo que habíamos obtenido antes al trabajar con la condición inicial gaussiana.

Es conveniente mencionar ahora que la distorsión que sufre un pulso que evoluciona de acuerdo con la ecuación (6.1) es conocida en la literatura en inglés como “group-velocity dispersion” (GVD). A este efecto lo llamaremos en estas notas “efecto GVD” y, como hemos visto en este capítulo, consiste en un ensanchamiento del pulso, una disminución de su altura y la aparición de una variación continua de frecuencia.

Finalicemos este capítulo con una observación acerca de las longitudes de onda usadas en los sistemas de telecomunicaciones basados en fibras ópticas. Dado que un paquete de ondas tiene una mínima tendencia a dispersarse cuando su longitud de onda central es la frecuencia de cero dispersión λ_D , los primeros sistemas telefónicos de larga distancia, así como el primer cable Trans-Atlántico hecho de fibra óptica (el TAT-8, puesto en operación en 1988), utilizaron pulsos luminosos con una longitud de onda central de 1300 nm [Hecht pp. 28, 330].

Lo dicho en el párrafo anterior parecería implicar que la longitud de onda de 1300 nm es siempre la mejor opción para ser usada en los sistemas de telecomunicaciones. Esto no es así. La longitud de 1300 nm es la mejor opción *sólo con respecto a la dispersión* de los pulsos luminosos, no así con respecto a su *atenuación*. Como mencionamos al final del Capítulo 3, en una fibra óptica de SiO₂ la mínima atenuación se alcanza usando una longitud de onda de 1550 nm [Agrawal p. 5; Hecht p. 69], por lo cual en ciertos casos esta longitud de onda se considera una mejor opción que la longitud de 1300 nm. En particular, es interesante observar que a partir del segundo cable Trans-Atlántico hecho de fibra óptica (el TAT-9, puesto en operación en 1992), ya prácticamente todos los cables submarinos (de fibra óptica) utilizan la longitud de onda de 1550 nm [Hecht pp. 330-332].

A primera vista, el hecho de que la mínima dispersión y la mínima atenuación se alcancen en longitudes de onda diferentes parecería implicar que sería imposible minimizar ambos efectos simultáneamente. Y esto sería así, en efecto, si la longitud de mínima atenuación, λ_A , fuera menor que la longitud de cero dispersión, $\lambda_D = 1300$ nm. Sin embargo, el hecho de que $\lambda_A = 1500$ nm $>$ λ_D implica que un pulso luminoso que viaje por una fibra óptica con una longitud de onda central igual a λ_A estará en el régimen de dispersión anómala (en donde $\beta_2 < 0$) y en este caso el efecto dispersivo, que se describe mediante el segundo término de la ec. NLS (4.1), puede ser cancelado por el efecto no lineal asociado al tercer término de esta ecuación (como vimos en el Capítulo 4), si el pulso tiene la forma del solitón (4.2).

Vemos, pues, que los solitones ópticos son pulsos luminosos que además de no dispersarse, pueden viajar con la mínima atenuación posible gracias a que la longitud de mínima atenuación λ_A está en la zona de dispersión anómala (*i.e.*, $\beta_2(\lambda_A) < 0$) en la cual los solitones ópticos pueden existir. Por lo tanto, la potencial importancia tecnológica de los solitones ópticos se debe, en parte, a la circunstancia afortunada de que $\lambda_A > \lambda_D$.

Capítulo 7

El caso no lineal y el efecto SPM

Veamos ahora cómo se comportan las soluciones de la ecuación (5.7). Como en este caso será un poco más conveniente trabajar con una función adimensional, escribiremos (5.7) en términos de la variable U , definida en (5.2), con lo cual la ecuación a estudiar será:

$$iU_z + \frac{1}{L_{NL}} |U|^2 U = 0$$

la cual puede ponerse en la forma:

$$U_z - \frac{i}{L_{NL}} |U|^2 U = 0. \quad (7.1)$$

Multiplicando esta ecuación por U^* se obtiene:

$$U^* \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{i}{L_{NL}} |U|^2 U U^* = 0$$

y tomando ahora el complejo conjugado obtenemos:

$$U \frac{\partial U^*}{\partial z} + \frac{i}{L_{NL}} |U|^2 U^* U = 0.$$

Sumando las dos últimas ecuaciones vemos que:

$$\frac{\partial}{\partial z} (U U^*) = 0$$

lo cual implica que $|U|^2$ no depende de z (i.e., $|U(z,T)| = |U(0,T)|$) y por lo tanto (7.1) es una ecuación lineal, cuya solución es:

$$U(z, T) = U(0, T) \exp \left[i |U(0, T)|^2 \frac{z}{L_{NL}} \right]. \quad (7.2)$$

La expresión (7.2) muestra que la envolvente del pulso no se modifica conforme avanzamos a lo largo del eje z . Es decir, un pulso que evoluciona de acuerdo con la ecuación (7.1) no cambia de altura, ni de anchura. Lo que se modifica es la fase del pulso, ya que se produce un corrimiento de fase dado por:

$$\phi_{NL}(z, T) = |U(0, T)|^2 \frac{z}{L_{NL}}. \quad (7.3)$$

Esta expresión muestra que el corrimiento de fase que experimenta un pulso gobernado por (7.1) depende de la forma misma del pulso, por lo cual a esta modificación de la fase se le denomina en la literatura en inglés “self-phase modulation” (SPM). En estas notas llamaremos “efecto SPM” a esta variación de la fase, originada por el término no lineal de la ecuación (7.1).

El corrimiento de fase (7.3) hace que el pulso adquiera una variación continua de frecuencia, similar a la variación de frecuencia producida por el efecto GVD, sólo que ahora la variación (a lo largo del eje T) no es lineal.

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que la variación de frecuencia estaba dada por $-\partial\theta/\partial T$, donde $\theta(z, T)$ era la fase del pulso $A(z, T)$. En forma análoga, ahora la variación de frecuencia está dada por:

$$-\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T} |U(0, T)|^2 \frac{z}{L_{NL}}. \quad (7.4)$$

Para comprender mejor el significado geométrico de esta expresión, consideremos un pulso gaussiano:

$$U(0, T) = \exp \left(-T^2 / 2T_0^2 \right). \quad (7.5)$$

Tendremos, por lo tanto, que:

$$\phi_{NL}(z, T) = \exp \left(-T^2 / T_0^2 \right) \frac{z}{L_{NL}} \quad (7.6)$$

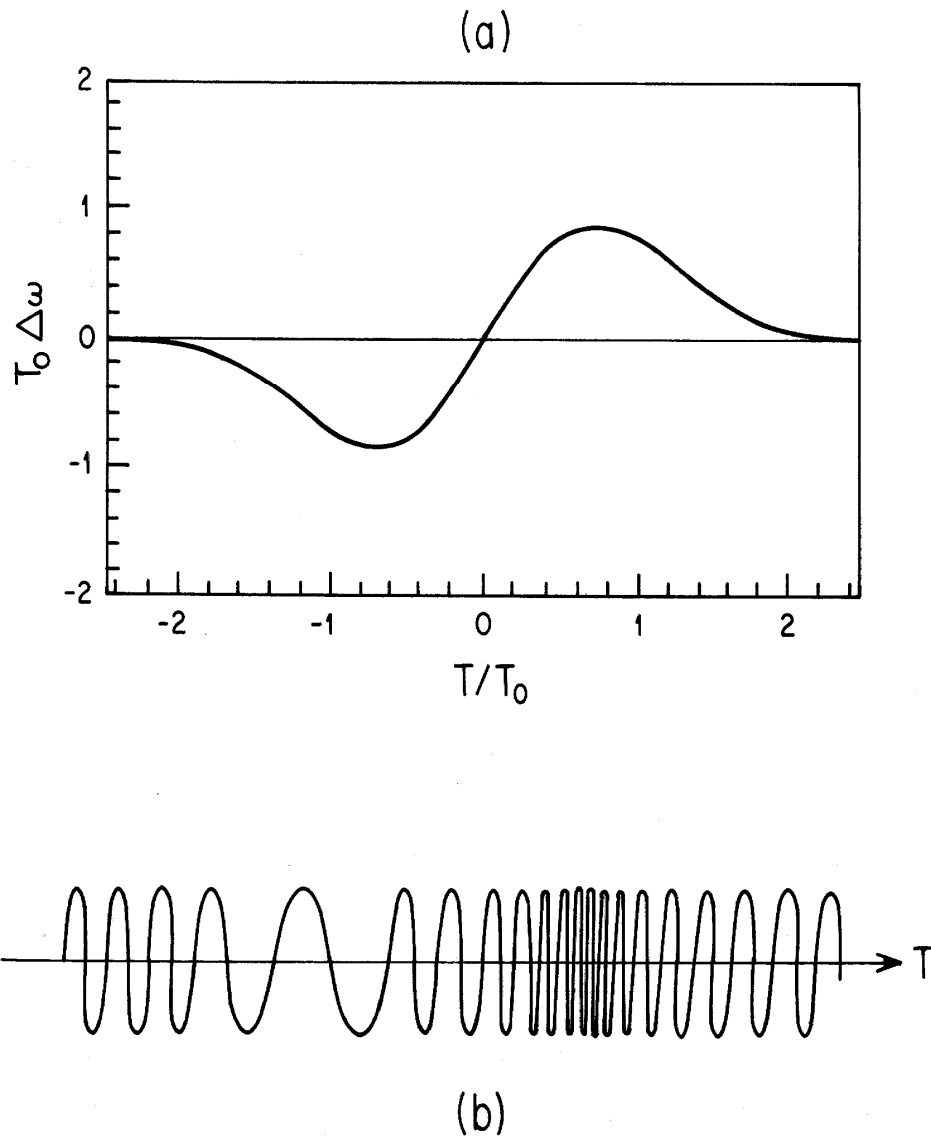


Fig. 7.1 (a) Variación de frecuencia $\Delta\omega(T)$ dada por la ecuación (7.7) con $z = L_{NL}$. (b) Representación cualitativa de una onda con frecuencia $\omega_0 + \Delta\omega(T)$.

y por consiguiente, la variación de frecuencia será:

$$\Delta\omega = -\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} = \frac{2T}{T_0^2} \exp\left(-T^2/T_0^2\right) \frac{z}{L_{NL}}. \quad (7.7)$$

En la Fig. 7.1(a) podemos observar la forma de esta función, para $z = L_{NL}$. Esta gráfica muestra que la frecuencia aumenta apreciablemente alrededor de $T/T_0 \approx 0.6$ y disminuye alrededor de $T/T_0 \approx -0.6$, lo cual implica que la onda portadora tendrá una variación temporal cualitativamente semejante a la que se muestra en la Fig. 7.1 (b).

Consideremos ahora cómo será el espectro de frecuencias (i.e., el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier) del pulso (7.2), cuando $U(0,T)$ es de la forma (7.5). Dado que la fase (7.6) depende de z , es claro que el espectro de frecuencias irá cambiando conforme avancemos a lo largo del eje z . Para $z = 0$ el espectro $|\tilde{U}(0,\omega)|^2$ será igual a una gaussiana centrada en $\omega = 0$, como vimos en la ecuación (6.5), lo cual implica que la transformada del campo eléctrico será una gaussiana centrada en $\omega - \omega_0 = 0$, ya que las fases del campo eléctrico y la función $U = (\delta P_0)^{-1/2} A$ difieren en $-\omega_0 t$, como podemos ver en (6.13). Al aumentar z el espectro de frecuencias empezará a mostrar dos picos adicionales, correspondientes a los dos picos que presenta la variación de frecuencia $\Delta\omega$ mostrada en la ecuación (7.7) y en la Fig. 7.1. Para $z = \pi L_{NL}$ el espectro será cualitativamente similar a la curva mostrada en la Fig. 7.2 (a). Cuando z aumenta más empiezan a generarse más picos en el espectro [Stolen y Lin 1978], como podemos ver en la Fig. 7.2 (b). Estos picos adicionales son producidos por un proceso de interferencia entre componentes de Fourier del pulso que tienen igual frecuencia, pero distinta fase [Agrawal p. 80].

Vemos, pues, que el efecto SPM, si bien no afecta la altura y la anchura del pulso, sí modifica drásticamente su espectro de frecuencias.

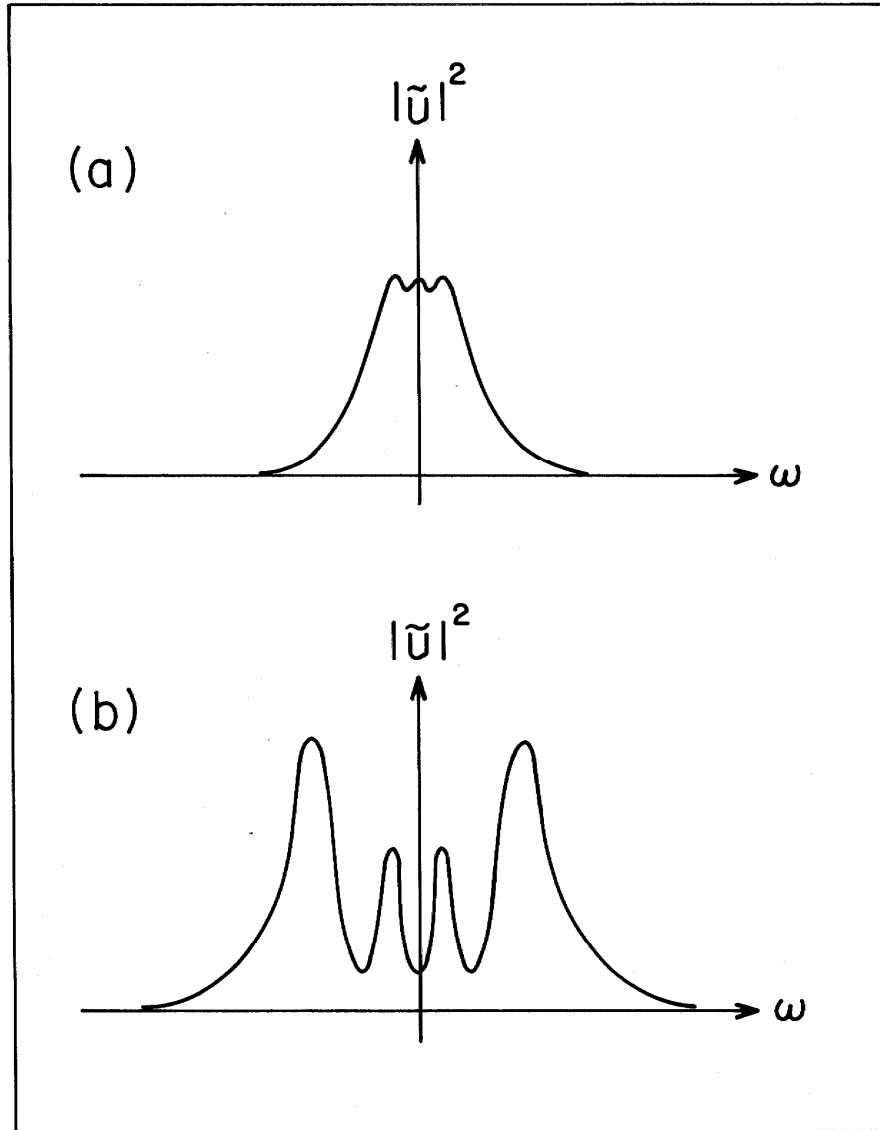


Fig. 7.2 Representación cualitativa del espectro de frecuencias de la solución de la ecuación (7.1), correspondiente a una condición inicial gaussiana. El espectro mostrado en (a) corresponde a $z = \pi L_{NL}$, y el que se muestra en (b) corresponde a $z = 3.5\pi L_{NL}$.

Capítulo 8

GVD + SPM

Por lo que hemos visto en las dos secciones anteriores, parecería que los efectos GVD y SPM afectan de manera tan diferente la estructura de los pulsos luminosos, que difícilmente podríamos imaginar que estos dos efectos pudieran cancelarse mutuamente. Sin embargo, de alguna forma estos dos efectos deben poder cancelarse entre sí. A continuación trataremos de entender intuitivamente cómo puede ocurrir esto.

En el Capítulo 6 vimos que el efecto GVD produce una variación continua de frecuencia, que en el caso de una condición inicial gaussiana, es igual a:

$$-\frac{\partial\theta}{\partial T} = \frac{zT}{\beta_2(z^2 + L_D^2)}$$

lo cual puede escribirse en la forma:

$$T_o \left(-\frac{\partial\theta}{\partial T} \right) = \text{sgn}(\beta_2) \frac{zL_D}{(z^2 + L_D^2)} \frac{T}{T_o} \quad (8.1)$$

de manera que $T_o(-\partial\theta/\partial T)$ es una función lineal de T , con pendiente positiva si $\beta_2 > 0$ y negativa en caso contrario. En la Fig. 8.1 (a) y (b) vemos la gráfica de la función (8.1), en el caso en que $z = L_D$ y $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$.

Por otra parte, recordemos que en el Capítulo 7 vimos que el efecto SPM también produce una variación continua de frecuencia, que para una condición inicial gaussiana, obedece la ecuación:

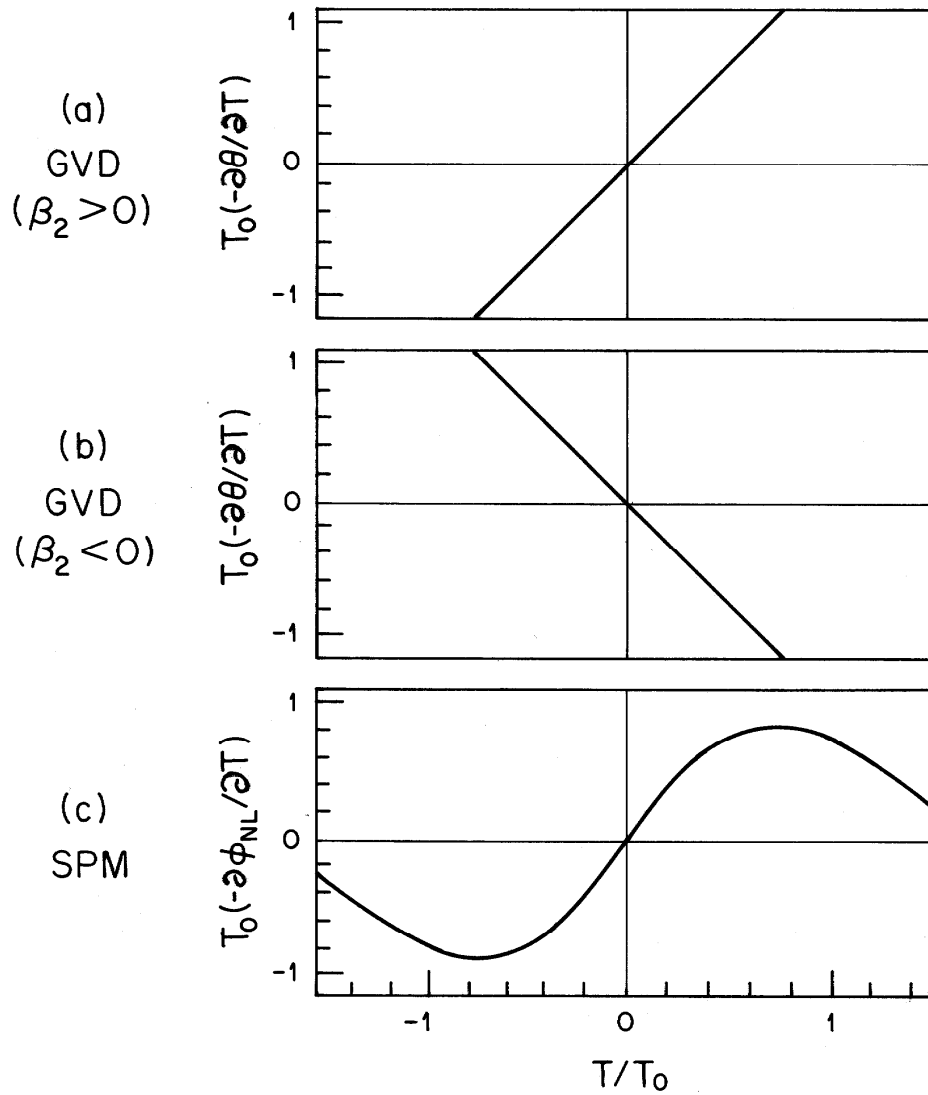


Fig. 8.1 Variaciones de frecuencia producidas por los siguientes efectos: (a) efecto GVD con $\beta_2 > 0$, (b) efecto GVD con $\beta_2 < 0$ y (c) efecto SPM. En (a) y (b) consideramos que $z = L_D$ y en (c) consideramos que $z = L_{NL}$.

$$T_o \left(-\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial T} \right) = \frac{2z}{L_{NL}} \frac{T}{T_o} \exp(-T^2 / T_o^2). \quad (8.2)$$

En la Fig. 8.1 (c) podemos ver la forma de esta función para $z = L_{NL}$.

Observando las tres gráficas de la Fig. 8.1 podemos ver que las variaciones de frecuencia de las gráficas (a) y (c) tienden a reforzarse, ya que en ambos casos la variación de frecuencia es positiva para $T > 0$ y negativa para $T < 0$. Por el contrario, las variaciones de frecuencia de las gráficas (b) y (c) tienden a cancelarse (sobre todo en el intervalo $-T_o \leq T \leq T_o$), puesto que son de signos opuestos.

La observación anterior sugiere claramente que podría haber la posibilidad de que los efectos GVD y SPM se cancelaran mutuamente si $\beta_2 < 0$, de manera que el hallazgo de que la ecuación:

$$i u_z - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} u_{tt} + |u|^2 u = 0 \quad (8.3)$$

tiene, para $\text{sgn}(\beta_2) = -1$, soluciones de la forma:

$$u(z,t) = 2q \text{ sech}(2qt) \exp(2iq^2 z)$$

que no se dispersan ni presentan variaciones continuas de frecuencia, resulta comprensible.

Por otra parte, las gráficas (a) y (c) de la Fig. 8.1 sugieren que cuando $\beta_2 > 0$ los efectos GVD y SPM no se podrán cancelar entre sí. Lo que estas gráficas sugieren es que en el caso en que $\beta_2 > 0$, ambos efectos se reforzarán mutuamente. Esta “sugerencia” resulta ser parcialmente correcta (lo cual no es una sorpresa) y parcialmente errónea (lo cual sí resulta inesperado). Es correcta en tanto que los efectos GVD y SPM no se pueden cancelar mutuamente si $\beta_2 > 0$. Haciendo experimentos numéricos con la ecuación (8.1) se comprueba que cuando $\beta_2 > 0$ la dispersión de un haz luminoso (*i.e.*, el ensanchamiento y la disminución de altura) es mayor cuando actúan simultáneamente los efectos GVD y SPM, que cuando sólo actúa el efecto GVD [Agrawal pp. 85-86].

Lo que resulta inesperado es que cuando $\beta_2 > 0$ la distorsión del espectro de frecuencias producida por la acción conjunta de los efectos GVD y SPM es *menor* (en vez de mayor) que la distorsión que produciría el efecto SPM solo [Agrawal pp. 85-86]. Esto implica que cuando $\beta_2 > 0$ el efecto SPM no se ve reforzado por la intervención simultánea del efecto GVD, contra lo que parecían sugerir las gráficas (a) y (c) de la Fig. 8.1. Para entender por qué ocurre esto debemos observar que la intervención del efecto GVD hace que el pulso se ensanche y disminuya de altura, de manera que los valores de la derivada $\partial |U|^2 / \partial T$, donde U es la variable definida en (5.2), disminuyen en valor absoluto. Si ahora recordamos que la variación de frecuencia producida por el efecto SPM está dada por:

$$-\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T} |U|^2 \frac{z}{L_{NL}}$$

nos daremos cuenta que esta variación de frecuencia disminuye (en valor absoluto) al intervenir el efecto GVD.

Para recordar este comportamiento, podríamos decir que cuando los efectos GVD y SPM actúan simultáneamente y $\beta_2 > 0$, el efecto GVD se acentúa a expensas del efecto SPM y este último se debilita.

Capítulo 9

Resolución numérica de la ecuación NLS

En el capítulo anterior vimos cómo determinar la forma de los solitones brillantes y oscuros de la ecuación no lineal de Schrödinger:

$$iu_z - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} u_{tt} + |u|^2 u = 0. \quad (9.1)$$

Ahora queremos ver cómo determinar la solución de (9.1) correspondiente a una condición inicial arbitraria. En el Capítulo 1 mencionamos que este problema fue resuelto por Zakharov y Shabat en 1971 utilizando el método IST (“inverse scattering transform”). Sin embargo, lo que en realidad lograron Zakharov y Shabat fue transformar el problema de condiciones iniciales para (9.1) en un sistema de ecuaciones integrales, que sólo puede ser resuelto explícitamente en ciertos casos particulares. En general no es posible encontrar analíticamente la solución de la ecuación (9.1) correspondiente a una condición inicial dada. Es pues necesario recurrir a un método numérico para resolver este problema.

El método numérico que ha resultado más exitoso para resolver la ecuación NLS (9.1) fue desarrollado alrededor de 1972 por Tappert y sus colaboradores [Tappert y Judice 1972; Hardin y Tappert 1973; Hasegawa y Tappert 1973] y fue bautizado por Tappert con el nombre de “split-step Fourier method”. En un artículo de 1984 Taha y Ablowitz mostraron que este método es incondicionalmente estable y además es más rápido que otros métodos numéricos que podrían ser usados para resolver la ecuación NLS. La precisión de este método también se examina en dicho artículo [Taha y Ablowitz 1984]. El método de Fourier-Tappert no sólo es aplicable a la

ecuación NLS (9.1), sino a muchas variantes, tales como la ecuación NLS generalizada:

$$iu_z + \varepsilon_1 u_{tt} + \varepsilon_2 u_{4t} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0 \quad (9.2)$$

la cual es de interés por diversas razones [Fujioka y Espinosa 1997]. En lo que sigue explicaremos cómo aplicar este método a la ecuación (9.2), ya que ésta incluye, como caso particular, a la ecuación NLS normal.

Para encontrar una solución numérica de la ecuación (9.2) por el método de Tappert, correspondiente a una condición inicial conocida $u(z_0, t)$, empecemos por dividir el eje z en fragmentos de longitud Δz . A continuación consideremos el proceso que transforma a la condición inicial $u(z_0, t)$ en la nueva función $u(z_0 + \Delta z, t)$. Este es un proceso en el cual los términos dispersivos y no lineales de la ecuación (9.2) actúan simultáneamente. Sin embargo, la idea de Tappert consiste en suponer que podemos obtener una aproximación para la función $u(z_0 + \Delta z, t)$ calculando de manera independiente el efecto de los términos dispersivos y el efecto de los términos no lineales y luego combinando estos dos efectos en forma sucesiva: primero el efecto de los términos dispersivos (lineales) sobre la primera mitad del intervalo (de longitud $\Delta z/2$), después el efecto que tienen los términos no lineales sobre todo el intervalo Δz y por último el efecto de los términos lineales sobre la segunda mitad del intervalo. Repitiendo este proceso S veces podemos obtener una aproximación para la función $u(z_0 + S \Delta z, t)$. En la Fig. 9.1 mostramos este proceso esquemáticamente, denotando por $L(\Delta z)$ al efecto de los términos lineales (dispersivos) de la ecuación (9.2) sobre una distancia Δz y por $NL(\Delta z)$ al efecto de los términos no lineales.

Para definir de manera más precisa el proceso descrito arriba, denotemos por $L(u_A(z_0, t), \Delta z)$ a la solución $u(z_0 + \Delta z, t)$ de la ecuación lineal:

$$iu_z + \varepsilon_1 u_{tt} + \varepsilon_2 u_{4t} = 0 \quad (9.3)$$

correspondiente a la condición inicial $u(z_0, t) = u_A(z_0, t)$. En forma similar denotemos por $NL(u_B(z_0, t), \Delta z)$ a la solución $u(z_0 + \Delta z, t)$ de la ecuación no lineal:

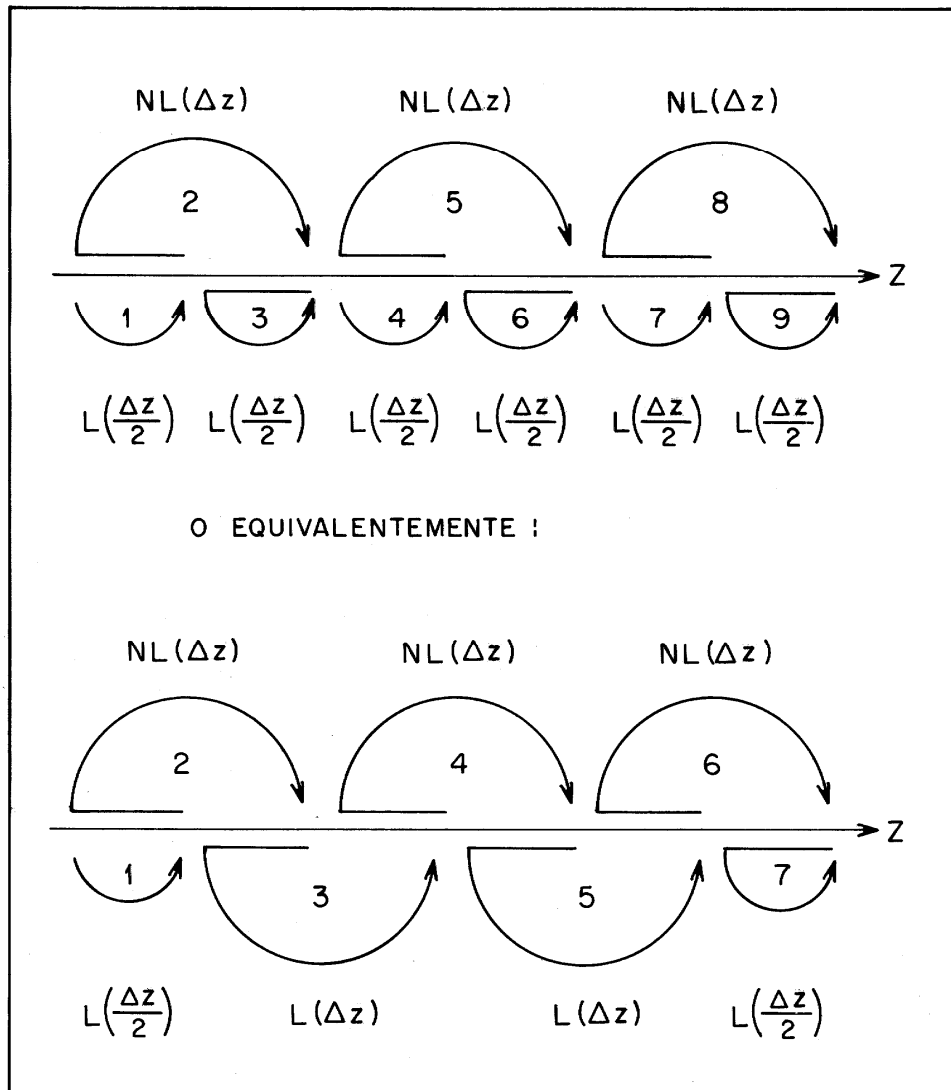


Fig. 9.1 Descripción esquemática del proceso que se sigue para calcular $u(z_0 + 3\Delta z, t)$ mediante el método de Fourier-Tappert.

$$iu_z + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0 \quad (9.4)$$

correspondiente a la condición inicial $u(z_0, t) = u_B(z_0, t)$.

Usando la notación introducida en el párrafo anterior, el método de Fourier-Tappert para encontrar la forma aproximada de la solución $u(S\Delta z, t)$ de la ecuación (9.2), correspondiente a la condición inicial $u(0, t) = u_{0A}(t)$ consistiría en el cálculo sucesivo de las funciones que se indican a continuación:

LISTA DE FUNCIONES POR CALCULAR

$$\begin{array}{l}
 L(u_{0A}, \Delta z / 2) \equiv u_{0B} \\
 \left. \begin{array}{l}
 NL(u_{0B}, \Delta z) \equiv u_{1A} \quad , \quad L(u_{1A}, \Delta z) \equiv u_{1B} \\
 NL(u_{1B}, \Delta z) \equiv u_{2A} \quad , \quad L(u_{2B}, \Delta z) \equiv u_{2B} \\
 NL(u_{2B}, \Delta z) \equiv u_{3A} \quad , \quad L(u_{3A}, \Delta z) \equiv u_{3B} \\
 \dots\dots\dots \\
 NL(u_{S-2,B}, \Delta z) \equiv u_{S-1,A} \quad , \quad L(u_{S-1,A}, \Delta z) \equiv u_{S-1,B} \\
 NL(u_{S-1,B}, \Delta z) \equiv u_{SA} \quad , \quad L(u_{SA}, \Delta z / 2) \equiv u_{SB}
 \end{array} \right\} S - 1 \text{ veces}
 \end{array}$$

La última función calculada, $u_{SB}(t)$, es la aproximación buscada de la solución $u(S\Delta z, t)$ de la ecuación (9.2).

Pasemos ahora a ver cómo calcular $L(u(z,t), \Delta z)$ y $NL(u(z,t), \Delta z)$.

Para calcular $L(u(z,t), \Delta z)$ necesitamos resolver la ecuación lineal (9.3). Para ello utilizaremos la transformada de Fourier definida en la forma:

$$\tilde{u}(z, \nu) = F[u(z, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) \exp(2\pi i \nu t) dt \quad (9.5)$$

donde ν es la frecuencia medida en Hertz (*i.e.*, en ciclos por segundo), que no debe confundirse con la frecuencia angular ω , la cual se mide en radianes

por segundo. Notemos que la ecuación (9.5) implica que si $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ tendremos que:

$$F[u_t] = (-2\pi i\nu)F[u]. \quad (9.6)$$

Tomando ahora la transformada de (9.3), encontramos que:

$$\tilde{u}_z + i\varepsilon_1(2\pi\nu)^2\tilde{u} - i\varepsilon_2(2\pi\nu)^4\tilde{u} = 0$$

cuya solución es:

$$\tilde{u}(z, \nu) = \tilde{u}(0, \nu) \exp \left\{ i \left[\varepsilon_2(2\pi\nu)^4 - \varepsilon_1(2\pi\nu)^2 \right] z \right\}.$$

La expresión anterior implica que:

$$\tilde{u}(z + \Delta z, t) = \tilde{u}(z, \nu) \exp \left[i \left(\varepsilon_2(2\pi\nu)^4 - \varepsilon_1(2\pi\nu)^2 \right) \Delta z \right]$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} u(z + \Delta z, t) &= F^{-1} \left[\tilde{u}(z, \nu) \exp \left[i \Delta z \left(\varepsilon_2(2\pi\nu)^4 - \varepsilon_1(2\pi\nu)^2 \right) \right] \right] \\ &= F^{-1} \left[F[u(z, t)] \exp \left[i \Delta z \left(\varepsilon_2(2\pi\nu)^4 - \varepsilon_1(2\pi\nu)^2 \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Como $L(u(z, t), \Delta z)$ es precisamente $u(z + \Delta z, t)$, tenemos finalmente que:

$$L(u(z, t), \Delta z) = F^{-1} \left[F[u(z, t)] \exp \left[i \Delta z \left(\varepsilon_2(2\pi\nu)^4 - \varepsilon_1(2\pi\nu)^2 \right) \right] \right]. \quad (9.7)$$

Es interesante observar que esta expresión nos da la solución *exacta* de la ecuación (9.3) y es válida para cualquier valor de Δz , no solamente para Δz pequeña.

Veamos ahora cómo calcular $NL(u(z,t),\Delta z)$. Para encontrar esta función debemos resolver la ecuación no lineal (9.4). Empleando el mismo procedimiento que usamos al principio del capítulo anterior, se puede probar que la solución de (9.4) es tal que $|u|$ no depende de z . Por lo tanto, (9.4) es una ecuación lineal en z y su solución es:

$$u(z,t) = u(0,t) \exp \left[i (\gamma_1 |u|^2 - \gamma_2 |u|^4) z \right].$$

Esta expresión se puede también escribir en la forma:

$$u(z + \Delta z, t) = u(z, t) \exp \left[i \Delta z (\gamma_1 |u|^2 - \gamma_2 |u|^4) \right]$$

de manera que $NL(u(z,t),\Delta z)$, que es precisamente $u(z+\Delta z,t)$, se calculará de la manera siguiente:

$$NL(u(z,t),\Delta z) = u(z,t) \exp \left[i \Delta z (\gamma_1 |u|^2 - \gamma_2 |u|^4) \right]. \quad (9.8)$$

Esta expresión es la solución *exacta* de la ecuación (9.4) y es válida para cualquier valor de Δz , no solamente para Δz pequeña.

Una vez con las expresiones (9.7) y (9.8) parecería que ya podríamos calcular la serie de funciones que se indicaron en la “lista de funciones por calcular”. Sin embargo, todavía hay un punto delicado que merece examinarse con más detalle y ese punto es cómo calcularemos la transformada de Fourier y la transformada inversa que aparecen en la ecuación (9.7). Este punto es delicado porque en general estas transformadas no se podrán calcular analíticamente y por lo tanto es necesario evaluarlas numéricamente. Para ello se utiliza el algoritmo conocido como “transformada rápida de Fourier”, del cual hay muchas variantes. El lector podría utilizar, por ejemplo, la subrutina `four1` que aparece en la sección 12.2 del libro “Numerical Recipes in Fortran”, de W.H. Press y sus colaboradores [Press *et al.* 1992]. Si se usa esta subrutina es importante observar cuatro cosas que mencionaremos a continuación.

En primer lugar debemos observar que la subrutina `four1` supone tácitamente que la condición inicial $u(0,t) = h(t)$ es una función periódica y considera que los $2N$ valores reales $Re(h_1), Im(h_1), \dots, Re(h_N), Im(h_N)$ que

se le dan como datos de entrada son las partes reales e imaginarias de N valores complejos $h_k = h(t_k)$ de la condición inicial, correspondientes a N puntos de la forma:

$$t_k = (k-1)\Delta t, \quad k = 1, \dots, N \quad (9.9)$$

donde Δt es tal que $N\Delta t$ es el período de la función $h(t)$. Es importante observar que los N puntos indicados en (9.9) están contenidos en un intervalo de la forma $[0, N\Delta t)$ y no en un intervalo centrado en cero de la forma $[-N\Delta t/2, N\Delta t/2)$. Si llamamos H_k a los N valores complejos que calcula la transformada rápida de Fourier con la condición inicial:

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = (k-1)\Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9.10)$$

y llamamos H'_k a los valores que calcularía si le diéramos como condición inicial la siguiente:

$$h'_k = h(t'_k), \quad t'_k = -\frac{N}{2}\Delta t + (k-1)\Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9.11)$$

veríamos que:

$$H'_k = (-1)^{k-1} H_k. \quad (9.12)$$

Para entender por qué H'_k y H_k se relacionan de esta manera debemos entender que cuando pasamos de los valores iniciales $\{h_k | k = 1, \dots, N\}$ a los nuevos valores $\{h'_k | k = 1, \dots, N\}$ la subrutina four1 no se da cuenta de que nosotros cambiamos los puntos t_k en los cuales evaluamos a la función $h(t)$, sino que piensa que la función misma se corrió una distancia $(N/2)\Delta t$ y esto provoca, como se ve en la sección 8-3 del texto de E.O. Brigham [1992], que los valores originales de la transformada rápida, H_k , se transformen en los nuevos valores:

$$H'_k = H_k e^{-2\pi i (k-1)(N/2)/N} = (-1)^{k-1} H_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.13)$$

Es importante observar que lo que nosotros denotamos como H_k es llamado $H(k-1)$ en el libro de Brigham. Olvidar esto podría llevarnos a confusiones.

En segundo lugar debemos observar que de los N valores complejos $\{H_k | k=1, \dots, N\}$ que nos entrega la subrutina four1 al calcular la transformada rápida de una cierta condición inicial $\{h_k | k=1, \dots, N\}$, los primeros $(N/2)+1$ valores $\{H_k | k=1, \dots, (N/2)+1\}$ corresponden a las frecuencias positivas (o cero):

$$\nu_k = (k-1)\Delta\nu, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} + 1 \quad (9.14)$$

donde $\Delta\nu = (N\Delta t)^{-1}$, mientras que los siguientes $(N/2)-1$ valores $\{H_k | k = (N/2) + 2, \dots, N\}$ corresponden a las frecuencias negativas:

$$\nu_k = (k-N-1)\Delta\nu, \quad k = \frac{N}{2} + 2, \dots, N. \quad (9.15)$$

Los valores de ν_k indicados en (9.14) y (9.15) son necesarios al implementar numéricamente la ecuación (9.7), ya que una vez calculados los N valores complejos $\{U_k | k=1, \dots, N\}$ obtenidos al calcular la transformada rápida $F[u]$, deberemos construir una nueva serie de N valores complejos dados por:

$$\left\{ \exp \left[i \Delta z \left[\varepsilon_2 (2\pi\nu_k)^4 - \varepsilon_1 (2\pi\nu_k)^2 \right] \right] U_k \mid k = 1, \dots, N \right\} \quad (9.16)$$

para luego calcular la transformada inversa rápida de este conjunto de valores, lo cual puede hacerse usando nuevamente la subrutina four1, sólo que en esta ocasión debemos asignarle el valor -1 al parámetro “isign” que aparece en four1.

En tercer lugar debemos notar que los valores $\{H_k | k=1, \dots, N\}$ que se obtiene al calcular la transformada rápida correspondiente a una condición inicial $\{h_k | k=1, \dots, N\}$ difieren en un factor Δt de los verdaderos valores $\tilde{h}(\nu_k)$ de la transformada de Fourier analítica. Es decir:

$$\tilde{h}(v_k) \approx \Delta t H_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.17)$$

De manera similar, los N valores complejos ($2N$ valores reales) que nos entrega la subrutina `four1` (con `isign = -1`) al calcular la transformada rápida inversa correspondiente a la condición inicial $\{H_k | k = 1, \dots, N\}$ difieren en un factor $1/N$ de los valores iniciales $\{h_k | k = 1, \dots, N\}$. Así pues, si denotamos por $\mathcal{F}[h]$ a la transformada rápida de una condición inicial $h(t)$ y por \mathcal{F}^{-1} a la transformada rápida inversa, tendremos que:

$$h(t) = \frac{1}{N} \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[h]]. \quad (9.18)$$

Por último, en cuarto lugar, debemos observar que el valor de N debe ser igual a una potencia entera de 2, es decir, debemos tener $N = 2^N$, pues de lo contrario la subrutina `four1` dará resultados erróneos.

Una vez llegados a este punto, esperamos que el lector esté en condiciones de utilizar el método de Fourier-Tappert (“the split-step Fourier method”) para resolver numéricamente la ecuación NLS (9.1), o alguna de sus generalizaciones, tal como la ecuación (9.2).

Apéndice A

Breve historia de la ecuación KdV

La resolución de la ecuación NLS presentada por Zakharov y Shabat en 1971 mostró que la ecuación KdV no era la única EDP no lineal de interés físico que podía resolverse por el método IST y que tenía soluciones tipo “solitón”. A raíz de este descubrimiento se inició un estudio cuidadoso de otras EDPs no lineales que también pudieran resolverse por IST. Con el tiempo a estas ecuaciones se les empezó a llamar “integrables”, aun cuando este adjetivo a veces tiene un significado diferente en otros contextos (sobre el término “integrable” resultan de interés los artículos de Segur [1991] y de Kruskal y Clarkson [1992], así como el libro *What is Integrability?*, editado por Zakharov).

La investigación en torno a las ecuaciones integrables mostró que éstas no sólo tienen en común el ser resolubles por IST, sino que también comparten otras características peculiares, como tener infinitas leyes de conservación [Kruskal y Clarkson 1992], poseer la propiedad de Painlevé [Weiss *et al.* 1983; Ramani *et al.* 1989] y poder ser escritas en la forma bilineal de Hirota [Hirota 1971, 1972a, 1972b, 1973, 1980].

El reconocimiento de la importante comunión existente entre las diversas ecuaciones integrables ha hecho que los hallazgos encontrados al estudiar una ecuación integrable en particular sean de interés general para quienes trabajan con otras ecuaciones integrables. En particular, para los interesados en trabajar con la ecuación NLS es importante conocer (aunque sea a grandes rasgos) la historia de la ecuación KdV. Por lo tanto, en este apéndice examinemos un poco más de cerca la secuencia de hallazgos relacionados con la ecuación KdV anteriores a 1971, año en que Zakharov y Shabat descubrieron que la ecuación NLS es semejante a la KdV, ya que también puede resolverse por dispersión inversa (*inverse scattering*) y posee soluciones tipo “solitón”.

1834

Es frecuente iniciar la historia de los solitones recordando a John Scott Russell, quien un día, en agosto de 1834, observaba a un par de caballos que jalaban rápidamente a una pequeña embarcación a lo largo de un angosto canal en Escocia. Sucedió que en un cierto momento la embarcación se detuvo súbitamente, pero el impulso que la lancha le había impartido al agua hizo que una onda de unos 30 ó 40 cm. de alto y unos 9 m. de largo continuara propagándose por el canal a una velocidad de 13 ó 14 km/h. Russell persiguió a la onda a caballo por 2 ó 3 km, hasta que la perdió de vista en las curvas del canal [Bullough y Caudrey pp. 1-3; Newell pp. 1-3]. 61 años después se demostraría que lo que Russell observó fue un solitón.

1895

En este año los holandeses Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) y Gustav de Vries publicaron un artículo [Korteweg y de Vries 1895] en el cual buscaban explicar, entre otras cosas, la existencia de la onda solitaria observada por John Scott Russell. En su artículo Korteweg y de Vries deducen la ahora famosa ecuación KdV:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

y encuentran que esta ecuación tiene soluciones de la forma [Miura 1978; Matsuno 1984]:

$$u(x,t) = \frac{a^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{ax - a^3t + b}{2}\right)$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

1955

El siguiente evento importante (desde el punto de vista de la historia de los solitones) sucedió en el famoso laboratorio de Los Alamos, en Nuevo México, donde Enrico Fermi, John Pasta y Stan Ulam buscaban explicar,

mediante un modelo mecánico sencillo, por qué los sólidos tienen una conductividad térmica finita [Newell pp. 3-5]. Esta pregunta era interesante porque se sabía que si tratamos de explicar la conductividad térmica de un sólido mediante un modelo unidimensional formado por una serie de masas puntuales, colocadas a lo largo de una línea y unidas entre sí por resortes lineales (*i.e.*, resortes que obedecen la ley de Hooke), se encuentra que es posible transmitir energía de un extremo a otro de la cadena de resortes sin necesidad de tener el equivalente de un gradiente térmico y esto implicaría una conductividad térmica infinita. En 1914 Debye había sugerido que el modelo de resortes lineales conducía a la irreal conclusión de una conductividad térmica infinita debido a que en una cadena de resortes lineales es posible darle energía a uno solo de los modos normales de vibración de la cadena y dicha energía permanece en el modo elegido, sin ser repartida entre los demás modos. Debye pensó que si los resortes fueran ligeramente no lineales, los modos normales (de la aproximación lineal) interaccionarían entre sí y esta interacción obstaculizaría la propagación de energía, haciendo que la propagación de energía obedeciera una ecuación de difusión con un coeficiente de difusión finito, lo cual explicaría la finitud de la conductividad térmica. Motivados por esta idea, Fermi, Pasta y Ulam (FPU) decidieron estudiar numéricamente el comportamiento de una cadena unidimensional de 63 resortes no lineales en la computadora Maniac I de Los Alamos. FPU esperaban que una condición inicial en la cual estuviera excitado uno sólo de los modos normales de vibración evolucionaría, después de un cierto tiempo τ , a un estado en el cual la energía inicial se hubiera repartido equitativamente entre todos los modos, tal como lo sugeriría el teorema de equipartición de la energía de la mecánica estadística clásica [Kestin y Dorfman pp. 238-240; Reif pp. 248-250]. De esta forma, el tiempo de relajación τ determinaría el valor de la conductividad térmica.

El resultado del experimento de FPU fue una sorpresa para todos. En los primeros momentos, la energía que inicialmente correspondía a uno sólo de los modos de vibración, comenzó a distribuirse entre unos pocos de los 64 modos posibles, pero después la energía volvió a concentrarse en un 98% o 99% en el modo inicial. Al avanzar más el tiempo volvió a repetirse lo mismo.

Nadie, en aquel momento, pudo explicar el extraño fenómeno observado por FPU, al cual se le denominó *recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam*.

1965

El fenómeno de recurrencia observado por FPU intrigó a dos matemáticos de la Universidad de Princeton, Norman Zabusky y Martin Kruskal, los cuales decidieron analizar el problema desde un punto de vista continuo. Para entender la idea de Zabusky y Kruskal comencemos por fijarnos en cuál es la fuerza que siente una de las masas que están unidas por los resortes no lineales considerados por FPU. Suponiendo que los resortes ejercen una fuerza de magnitud:

$$F = kL + \alpha kL^2 = kL(1 + \alpha L)$$

al ser comprimidos o estirados una distancia L , se llega a que la fuerza sobre la i -ésima masa está dada por [Bullough y Caudrey p. 4]:

$$\begin{aligned} my_{i,tt} &= k(y_{i+1} - y_i)[1 + \alpha(y_{i+1} - y_i)] - k(y_i - y_{i-1})[1 + \alpha(y_i - y_{i-1})] \\ &= k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + k\alpha(y_{i+1}^2 - 2y_i y_{i+1} + 2y_i y_{i-1} - y_{i-1}^2) \end{aligned} \quad (A1)$$

donde y_i es el desplazamiento de la i -ésima masa de su posición de equilibrio.

Si consideramos ahora que la separación entre las masas es pequeña con respecto a la longitud de las ondas que se propagan por el sistema, podemos introducir una función continua $y(x,t)$ tal que:

$$y_i = y(x,t),$$

$$y_{i+1} = y(x+h,t) \approx y(x,t) + hy_x + \frac{1}{2}h^2 y_{xx} + \frac{1}{6}h^3 y_{xxx} + \frac{1}{24}h^4 y_{xxxx},$$

$$y_{i-1} = y(x-h,t) \approx y(x,t) - hy_x + \frac{1}{2}h^2 y_{xx} - \frac{1}{6}h^3 y_{xxx} + \frac{1}{24}h^4 y_{xxxx},$$

$$y_{i,tt} = y_{tt}.$$

Introduciendo estas expresiones en (A1), pero utilizando únicamente los tres primeros términos de las expresiones para y_{i+1} y y_{i-1} en el segundo paréntesis de (A1), obtenemos:

$$my_{tt} = kh^2 y_{xx} + \frac{1}{12} kh^4 y_{xxxx} + 2k\alpha h^3 y_x y_{xx}$$

es decir, una ecuación de la forma [Gustafson p. 269]:

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = \varepsilon c^2 y_x y_{xx} + \varepsilon c^2 \delta^2 y_{xxxx} \quad (A2)$$

donde $c^2 = kh^2/m$, $\varepsilon = 2\alpha h$ y $\delta^2 = h^2/12\varepsilon$. Esta ecuación toma una forma más sencilla si buscamos soluciones de la forma [Ablowitz y Segur p. 4]:

$$y(x,t) = f(\xi, T) \quad (A3)$$

donde $\xi = x - ct$ y $T = \varepsilon ct/2$. Sustituyendo (A3) en (A2) y despreciamos los términos de orden ε^2 , se obtiene:

$$f_{\xi T} + f_{\xi} f_{\xi\xi} + \delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

y esta ecuación se convierte en la ecuación KdV:

$$u_T + uu_{\xi} + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0$$

si definimos $u = f_{\xi}$. Llamando nuevamente x y t a las variables independientes, la ecuación KdV adquiere su forma usual:

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0. \quad (A4)$$

En su famoso artículo de 1965, Zabusky y Kruskal calcularon numéricamente la solución de la ecuación (A4), con $\delta = 0.022$, correspondiente a la condición inicial:

$$u(x,0) = \cos(\pi x).$$

El resultado que obtuvieron fue bastante curioso y lo esencial de dicho resultado puede entenderse observando la figura 1 de su artículo, la cual se reproduce (aproximadamente) en nuestra Fig. A1.

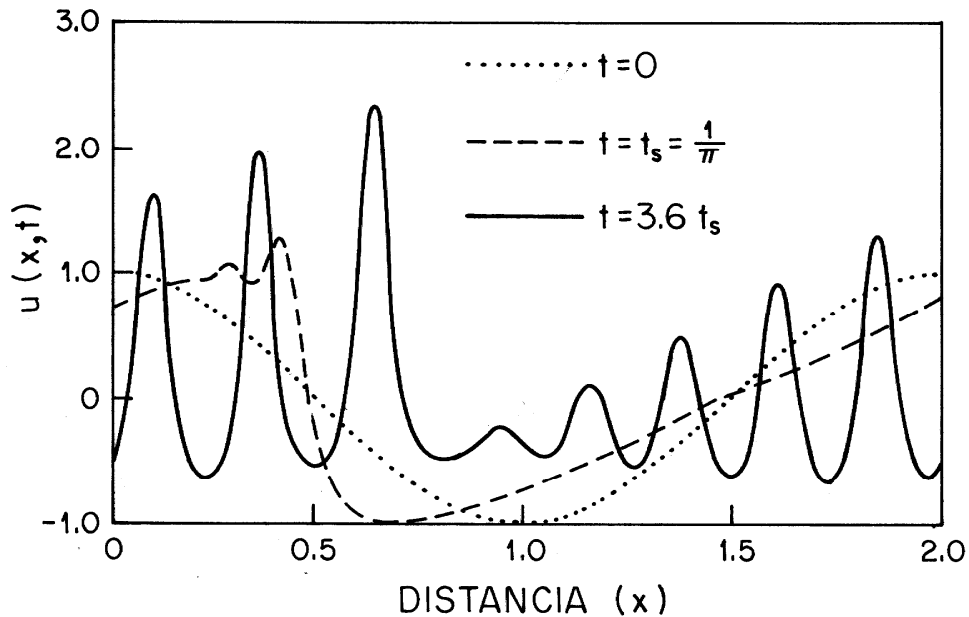


Fig. A1 Evolución temporal de la condición inicial $u(x,0) = \cos(\pi x)$, cuando $u(x,t)$ es solución de la ecuación de Korteweg-de Vries (A4), con $\delta = 0.022$

En esta figura vemos que al empezar a correr el tiempo la condición inicial $\cos(\pi x)$ tiende a convertirse en una especie de diente de sierra, que al tiempo $t_s = 1/\pi$ tiene una porción casi vertical, de manera que casi se produce una discontinuidad (un “shock”). Posteriormente se genera una serie de ondas que se mueven a velocidades diferentes y al cabo de un tiempo $t_r = 30.4t_s$ la forma de $u(x,t_r)$ vuelve a ser casi idéntica a la condición inicial, explicando así la recurrencia observada por Fermi, Pasta y Ulam.

El hallazgo de Zabusky y Kruskal de una cierta recurrencia fue un éxito, pero no una sorpresa. Finalmente era precisamente esa recurrencia lo que buscaban obtener. Lo que sí sorprendió a Zabusky y Kruskal fue la forma en que interactúan las ondas que se muestran en la Fig. A1. Zabusky y Kruskal encontraron que cuando dos de estas ondas “chocan” se distorsionan, pero instantes después reaparecen con sus formas y velocidades iniciales casi inalteradas, como si hubieran pasado una a través de la otra casi sin afectarse mutuamente. Esta tendencia a conservar su identidad hizo que Zabusky y Kruskal bautizaran a estas ondas con un nombre que recuerda al de una partícula: “solitón”.

El hecho de que casi se forme un “shock” al tiempo $t_s = 1/\pi$ no es una sorpresa y puede entenderse cualitativamente si despreciamos el último término de la ecuación (A4) y consideramos la ecuación:

$$u_t + uu_x = 0. \quad (\text{A5})$$

Para comprender cómo evoluciona la solución de esta ecuación, notemos que la ecuación lineal:

$$u_t + cu_x = 0$$

tiene la solución general:

$$u(x,t) = f(x - ct),$$

donde f es una función arbitraria [Drazin y Johnson p. 2]. Esto sugiere (y así es, en efecto) que la solución de (A5) podría expresarse de una manera implícita mediante una ecuación de forma:

$$u = f(x - ut).$$

Esta ecuación recuerda la forma de una onda viajera, salvo que la velocidad es igual al valor de la función misma. Esto sugiere que la “onda” avanzará más rápido donde sea más alta, por lo cual una onda inicialmente simétrica se distorsionará, formándose un frente de onda casi vertical después de un cierto tiempo (como en el experimento de Zabusky y Kruskal) y posteriormente se generará un perfil descrito por una función multivaluada,

similar al de una ola cuando se acerca a la playa. Este proceso se muestra gráficamente en la Fig. A2.

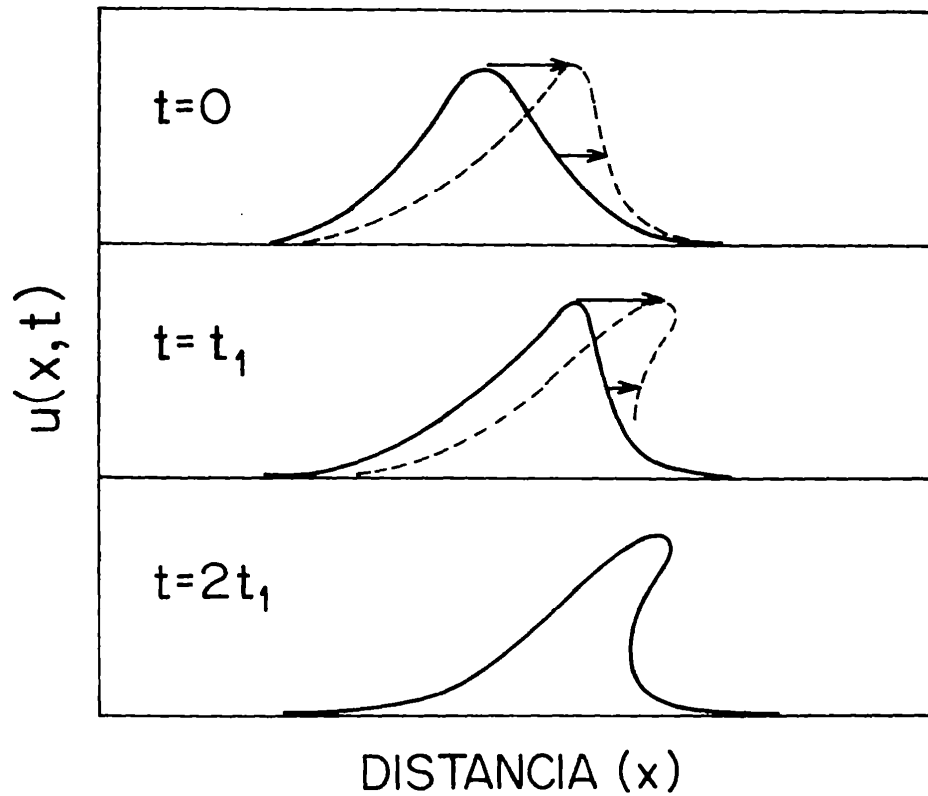


Fig. A2 Descripción cualitativa de la evolución de una función que satisface la ecuación $u_t + uu_x = 0$.

1967

Motivados por los resultados numéricos obtenidos por Zabusky y Kruskal, los investigadores Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM), de la

Universidad de Princeton, se pusieron a estudiar a la ecuación KdV y en 1967 encontraron una forma sumamente extraña y por demás ingeniosa, para obtener la solución de esta ecuación con condiciones iniciales dadas.

Para tener una idea del método de GGKM recordemos que la ecuación de Schrödinger con un potencial $u(x)$:

$$i\phi_t + \phi_{xx} - u\phi = 0$$

se puede separar proponiendo $\phi(x,t) = \psi(x)f(t)$, con lo cual obtenemos:

$$i\psi f_t + \psi_{xx} f - u\psi f = 0$$

de manera que:

$$\frac{\psi_{xx}}{\psi} - u = -i \frac{f_t}{f} = \text{cte.} \equiv -E$$

lo cual nos conduce a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\psi_{xx} + (E - u) \psi = 0. \quad (\text{A6})$$

Consideremos ahora para qué valores de E (los eigenvalores) existen soluciones de (A6) que permanezcan acotadas cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Se puede demostrar [Eckhaus y Van Harten p. 14] que si el potencial $u(x)$ satisface la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| |x|^k dx < \infty, \quad k = 0, 1, 2$$

entonces la ecuación (A6) tiene soluciones acotadas para cualquier $E > 0$, pero sólo para un conjunto discreto (y finito) de eigenvalores negativos $E_n < 0$.

A cada $E_n < 0$ le corresponde una eigenfunción, que para $x \rightarrow +\infty$ se comporta en la forma:

$$\psi(x) \sim c_n \exp \left[-(-E_n)^{1/2} x \right]$$

con c_n unívocamente definida por el potencial $u(x)$ y el eigenvalor E_n .

En forma similar, a cada $E > 0$ le corresponde una eigenfunción, que para $x \rightarrow \pm\infty$ se comporta así:

$$\psi(x) \sim \begin{cases} \exp(-iE^{1/2}x) + b(E)\exp(iE^{1/2}x), & \text{para } x \rightarrow +\infty \\ a(E)\exp(-iE^{1/2}x), & \text{para } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

con los coeficientes de transmisión y reflexión, $a(E)$ y $b(E)$, unívocamente definidos por el potencial $u(x)$ y el eigenvalor E .

Por lo tanto, si conocemos el potencial $u(x)$, podemos calcular los valores E_n y c_n y las funciones $a(E)$ y $b(E)$. Expresado esquemáticamente, tenemos que:

$$u(x) \Rightarrow \{E_n, c_n, a(E), b(E)\}.$$

Lo inverso también sucede. La teoría de dispersión muestra que si conocemos los valores de E_n y c_n y las funciones $a(E)$ y $b(E)$, podemos determinar el potencial $u(x)$:

$$\{E_n, c_n, a(E), b(E)\} \Rightarrow u(x).$$

Supongamos ahora que el potencial u , además de depender de x , dependiera de una variable adicional, que denotaremos como “ t ” y llamaremos “tiempo”, aunque en este momento no tiene realmente el significado de tiempo. Tendremos entonces que $u = u(x, t)$ y por lo tanto:

$$u(x, t) \Rightarrow \{E_n(t), c_n(t), a(E, t), b(E, t)\}.$$

Ahora bien, Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM) encontraron que si suponemos que $u(x, t)$ satisface la ecuación KdV:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{A7}$$

es posible encontrar la dependencia temporal de E_n, c_n, a y b . Más explícitamente, GGKM encontraron que:

$$\left. \begin{aligned} E_n(t) &= E_n(0) \\ c_n(t) &= c_n(0) \exp\left[4(-E_n)^3 t\right] \\ a(E,t) &= a(E,0) \\ b(E,t) &= b(E,0) \exp\left(8i E^3 t\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A8})$$

y esto nos permite hallar la solución de la ecuación (A7) correspondiente a una condición inicial $u(x,0)$ conocida, como veremos a continuación.

Supongamos que conocemos $u(x,0)$ y sabemos que el potencial evoluciona en el tiempo de acuerdo a la ecuación (A7). Tenemos entonces que:

- 1) Conociendo $u(x,0)$ podemos calcular $\{E_n(0), c_n(0), a(E,0), b(E,0)\}$.
- 2) Con los valores anteriores y las ecuaciones (A8), podemos entonces conocer los valores de $\{E_n(t), c_n(t), a(E,t), b(E,t)\}$ en cualquier instante t .
- 3) Con los valores anteriores podemos calcular la forma del potencial $u(x,t)$ al tiempo t .

Si llamamos $S(t)$ al conjunto de datos $\{E_n(t), c_n(t), a(E,t), b(E,t)\}$, podemos describir esquemáticamente el proceso que nos permite resolver la ecuación KdV con condiciones iniciales en la forma mostrada en la Fig. A3. A este método se le denominó posteriormente *transformada de dispersión inversa* (IST: “inverse scattering transform”). Esta novedosa forma de resolver la ecuación KdV generó gran interés, ya que hasta ese momento sólo en contados casos se había encontrado la forma de resolver el problema de condiciones iniciales para una EDP no lineal (de hecho, hasta donde este

autor conoce, sólo se podían resolver ecuaciones que pudieran ser linealizadas mediante cambios de variables, como en el caso de la ecuación de Burgers). Este método reveló además la existencia de una importante relación entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación KdV, lo cual era un resultado totalmente inesperado.

1968

En este año, Peter Lax, del Instituto Courant de la Universidad de Nueva York, descubrió que el factor esencial de la relación entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación KdV que hace posible resolver el problema de condiciones iniciales para esta última, es que estas dos ecuaciones pueden escribirse, respectivamente, de la manera siguiente:

$$L\psi = E\psi \quad \text{y} \quad (L_t + [L, A])u = 0, \quad (\text{A9})$$

donde L y A son dos operadores diferenciales lineales que involucran únicamente derivadas respecto a x [Drazin y Johnson pp.99-101]:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \quad (\text{A10})$$

$$A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial x}u, \quad (\text{A11})$$

y donde $[L, A]$ es el conmutador $LA - AL$. Notemos que así como al potencial $u(x,t)$ que aparece en la ecuación de Schrödinger lo hemos visualizado como a una familia uniparamétrica de potenciales etiquetados por el parámetro t , así también debemos visualizar a L como a una familia uniparamétrica de operadores cuyo parámetro es t . Viéndolo de esta manera es más fácil recordar que L_t indica la derivada de L con respecto a su dependencia *explícita* en t [Drazin y Johnson p. 98]. Por lo tanto, (A11) implica que:

$$L_t = u_t.$$

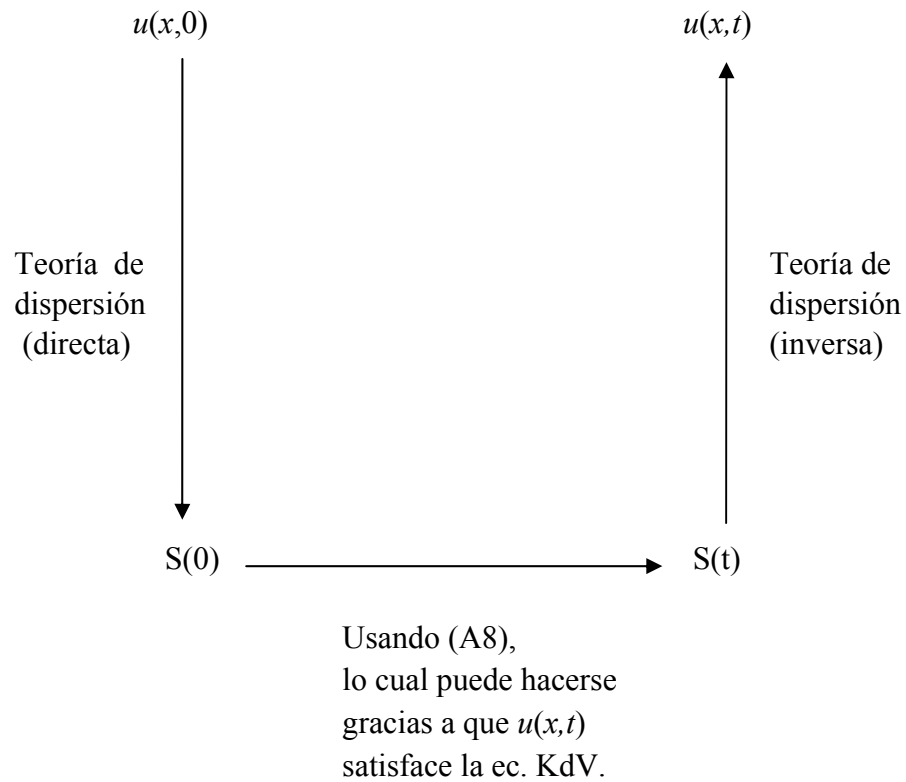


Fig. A3 Descripción esquemática del método IST.

es decir, L_t es un operador cuyo único efecto es multiplicar por u_t [Lax p. 470] y por lo tanto:

$$L_t u = uu_t.$$

Por otra parte, un corto cálculo muestra que:

$$[L, A] u = -6u^2 u_x + uu_{xxx}$$

de manera que la segunda de las ecuaciones mostradas en (A9) implica que:

$$uu_t - 6u^2 u_x + uu_{xxx} = 0$$

lo cual se reduce a la ecuación KdV (A7).

Con la publicación del trabajo de Lax, el destino de la ecuación KdV estaba a punto de encontrarse con el destino de la ecuación NLS. En 1968, sin embargo, nadie sospechaba que hubiera una relación importante entre estas dos ecuaciones. Dicha relación salió a la luz en 1971, cuando Zakharov y Shabat lograron demostrar que la ecuación NLS, al igual que la ecuación KdV, podía resolverse por el método de dispersión inversa. A partir de ese momento las historias de ambas ecuaciones quedaron unidas indisolublemente.

Apéndice B

El método IST más de cerca

En el apéndice anterior explicamos, de manera muy general, cuál es el procedimiento que se sigue para resolver la ecuación KdV mediante el método IST (la transformada de dispersión inversa). Vimos que este procedimiento consta, esencialmente, de tres etapas:

- 1) Resolver el problema de dispersión directa para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (A6), tomando como “potencial” a la condición inicial $u(x,0)$ de la ecuación KdV. Esto implica calcular los eigenvalores E_n , las constantes de normalización c_n y los coeficientes de transmisión y reflexión $a(E)$ y $b(E)$.
- 2) Calcular la evolución temporal de los datos de dispersión.
- 3) Resolver el problema de dispersión inverso. Es decir, obtener $u(x, t)$ (*i.e.* la solución de la ecuación KdV) a partir de las funciones $E_n(t)$, $c_n(t)$, $a(E, t)$ y $b(E, t)$.

Ahora, en este apéndice, quisiéramos contestar tres preguntas referentes al método IST que quedaron sin respuesta en el apéndice anterior.

PRIMERA PREGUNTA

La primera pregunta es fundamental: ¿cómo lograron descubrir Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM) que existía alguna relación entre la ecuación KdV y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (SCHRÖD)? En su famoso artículo de 1967 [*Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095] GGKM no mencionaron una sola palabra de cómo habían descubierto esa relación, de manera que en aquel momento todo el mundo (*i.e.* la pequeña fracción del mundo interesada en la ecuación KdV) se quedó perplejo ante el nuevo descubrimiento.

El misterio se aclaró casi un año más tarde, cuando el *Journal of Mathematical Physics* publicó otros dos artículos de Miura [Miura 1968; Miura, Gardner y Kruskal 1968] en los cuales se presentaba la secuencia de ideas que permitió descubrir la relación existente entre las ecuaciones KdV y SCHRÖD. En estos artículo se mostraba que si $v(x, t)$ satisface la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (mKdV) [Ablowitz y Clarkson p. 25; Ablowitz y Segur p. 6]:

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (\text{B1})$$

entonces la función:

$$u(x, t) = v^2 + v_x \quad (\text{B2})$$

satisface la ecuación KdV:

$$u_t - 6u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (\text{B3})$$

Mediante la “transformación de Miura” (B2) es trivial obtener $u(x, t)$ si conocemos $v(x, t)$. Lo inverso, en cambio, no es tan fácil. Para hallar $v(x, t)$ a partir de $u(x, t)$ necesitamos resolver la ecuación (B2), que es un caso particular de la ecuación de Riccati [Davis p. 57]:

$$v_x + Q(x)v + R(x)v^2 = P(x). \quad (\text{B4})$$

Miura y sus colegas sabían que esta ecuación se puede linealizar con el cambio de variable:

$$\psi = \frac{v_x}{Rv} \quad (\text{B5})$$

de manera que (B2) se puede transformar en:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0. \quad (\text{B6})$$

Finalmente, Miura y sus colegas observaron que como la ecuación KdV (B3) es invariante ante transformaciones galileanas de la forma [Drazin y Jonson p. 65]:

$$(x, t, u) \rightarrow (x - 6\lambda t, t, u - \lambda)$$

era razonable reemplazar u por $u - \lambda$ en (B6), con lo cual esta ecuación se transforma en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0. \quad (\text{B8})$$

De esta manera Miura y sus compañeros encontraron que existía una relación entre las soluciones $u(x, t)$ de la ecuación KdV y la ecuación de Schrödinger con potencial $u(x, t)$.

Es justo aclarar que GGKM no mantuvieron en secreto intencionalmente la secuencia de ideas que les permitió encontrar la relación existente entre las ecuaciones KdV y SCHRÖD. Los dos artículos de Miura en donde se presentó esta secuencia de ideas fueron enviados al *Journal of Mathematical Physics* tan sólo tres semanas después de que el artículo de GGKM fuera enviado al *Physical Review Letters*. Sin embargo, el *J. Math. Phys.* se tardó casi 11 meses en publicar los artículos de Miura (del 8 de octubre del 67, hasta finales de agosto del 68), mientras que el *Phys. Rev. Lett.* publicó el artículo de GGKM en menos de dos meses.

SEGUNDA PREGUNTA

La segunda pregunta que deseamos contestar aquí es cómo se determina la dependencia temporal de los datos de dispersión. En otras palabras, queremos saber cómo se encuentran las expresiones (A8) del apéndice anterior. El lector puede encontrar la respuesta a esta pregunta en el artículo de 1967 de GGKM. Sin embargo, como la respuesta presentada por GGKM es excesivamente compacta, resulta conveniente incluir aquí una explicación un poco más larga, pero más clara.

Empecemos, pues, derivando (B8) con respecto a x :

$$\psi_{xxx} - u_x \psi + (\lambda - u)\psi_x = 0 \quad (\text{B9})$$

y también derivemos (B8) con respecto a t :

$$\psi_{xxt} + (\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t = 0 \quad (\text{B10})$$

donde u_t se encuentra mediante la ecuación KdV (B3).

Ahora, procediendo como Drazin y Johnson [Drazin *et al.* 1989, p. 68], definamos una función $R(x, t)$ en la forma:

$$R(x, t) = \psi_t + u_x \psi - 2(u + 2\lambda)\psi_x. \quad (\text{B11})$$

Con esta definición de $R(x, t)$ resulta fácil probar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x R - \psi R_x) &= \psi_{xx} (\psi_t + u_x \psi - 2u\psi_x - 4\lambda\psi_x) \\ &\quad - \psi (\psi_{xxt} + u_{xxx}\psi - 3u_x\psi_{xx} - 2u\psi_{xxx} - 4\lambda\psi_{xxx}) \end{aligned}$$

y si ahora sustituimos en esta ecuación las expresiones para ψ_{xxx} y ψ_{xxt} que se obtienen de (B9) y (B10), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_x R - \psi R_x) &= \psi_{xx} (\psi_t - 2u\psi_x - 4\lambda\psi_x) \\ &\quad - \psi (u_{xxx}\psi - 4u_x\psi_{xx}) \\ &\quad - \psi (u\psi_t - \lambda\psi_t - \lambda_t\psi + u_t\psi) \\ &\quad + \psi (2u + 4\lambda)(u_x\psi - \lambda\psi_x + u\psi_x). \end{aligned}$$

El miembro derecho de esta ecuación se puede simplificar utilizando (B8) y se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi_x R - \psi R_x) = \psi^2 (\lambda_t - u_t + 6uu_x - u_{xxx}).$$

Si ahora introducimos la condición de que $u(x, t)$ sea solución de la ecuación KdV (B3), la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi_x R - \psi R_x) = \lambda_t \psi^2. \quad (\text{B12})$$

Esta ecuación es válida para cualquier eigenfunción $\psi(x, t)$ de la ecuación (B8) y su correspondiente eigenvalor λ y se satisface tanto para los eigenvalores discretos, como para los continuos. A continuación veremos que a partir de esta ecuación podemos encontrar la dependencia temporal de los datos de dispersión.

Fijémonos primeramente en los eigenvalores discretos. Una rápida consulta a algún texto de mecánica cuántica (por ejemplo [Landau y Lifshitz, sec. 18]) nos recordará que los eigenvalores discretos toman valores negativos y sólo habrá un número finito de ellos si el potencial $u(x, t)$ está

acotado y tiende a cero suficientemente rápido conforme $x \rightarrow \pm \infty$. Sean, pues, $\lambda = E_n < 0$ estos eigenvalores y $\psi_n(x, t)$ las correspondientes eigenfunciones ($n = 1, 2, \dots, N$). Otra rápida consulta a un texto de mecánica cuántica nos recordará también que las eigenfunciones asociadas a los eigenvalores discretos describen *estados ligados* [Landau y Lifshitz p. 29] y pueden considerarse normalizadas en la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1. \quad (\text{B13})$$

Teniendo esto en mente, integremos la ecuación (B12) sobre el eje x (con $\lambda = E_n$ y $\psi = \psi_n$). Obtenemos así lo siguiente:

$$[\psi_{nx} R_n - \psi_n R_{nx}]_{-\infty}^{\infty} = (E_n)_t \quad (\text{B14})$$

donde R_n representa a la función (B11) con $\lambda = E_n$ y $\psi = \psi_n$. Si ahora tomamos en cuenta que ψ_n (y por consiguiente también R_n) tiende a cero conforme $x \rightarrow \pm \infty$, veremos que (B14) implica que:

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} = 0 \quad (\text{B15})$$

y por lo tanto los eigenvalores discretos $\lambda = E_n$ no dependen del tiempo, de modo que:

$$E_n(t) = E_n(0) \quad (\text{B16})$$

que es la primera de las ecuaciones que aparecen en (A8).

Tomando en cuenta que para los eigenvalores discretos $\lambda_t = 0$, la ecuación (B12) implica que:

$$\psi_{nx} R_n - \psi_n R_{nx} = g_n(t) \quad (\text{B17})$$

donde las funciones g_n , $n = 1, 2, \dots, N$, son funciones arbitrarias de t . Notemos ahora que (B17) debe ser válida para cualquier valor de x . En particular, (B17) debe valer cuando $x \rightarrow \pm \infty$ y como ψ_n y R_n tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm \infty$, la ecuación (B17) implica que $g_n = 0$ para toda t . Tenemos así que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R_n}{\psi_n} \right) = 0$$

y por lo tanto:

$$\frac{R_n}{\psi_n} = h_n(t)$$

donde h_n , $n = 1, 2, \dots, N$, son nuevamente funciones arbitrarias de t .

Multipliquemos ahora la ecuación (B18) por ψ_n^2 . Obtenemos así:

$$\psi_n (\psi_{nt} + u_x \psi_n - 2u \psi_{nx} - 4E_n \psi_{nx}) = h_n \psi_n^2$$

y con ayuda de (B8) la ecuación anterior puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_n^2) + \frac{\partial}{\partial x} (u \psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 - 4E_n \psi_n^2) = h_n \psi_n^2.$$

Integrando ahora esta ecuación sobre todo el eje x (y recordando que ψ_n y ψ_{nx} tienden a cero cuando $x \rightarrow \pm \infty$), obtenemos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = h_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx$$

y como la integral (B13) es constante, su derivada temporal es cero, de manera que la ecuación anterior implica que $h_n \equiv 0$ para cualquier n . Tomando esto en cuenta, la ecuación (B18) implica que $R_n = 0$, es decir:

$$R_n = \psi_{nt} + u_x \psi_n - 2(u + 2E_n) \psi_{nx} = 0. \quad (\text{B19})$$

Esta es la ecuación que rige la evolución temporal de las eigenfunciones ψ_n .

Recordemos ahora que estamos considerando que:

$$u \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \psi_n(x, t) \rightarrow c_n(t) \exp[-(-E_n)^{1/2} x] \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Tomando esto en cuenta, la ecuación (B19) implica que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{c_n(t) \exp[-(-E_n)^{1/2} x]\} + 4E_n (-E_n)^{1/2} c_n(t) \exp[-(-E_n)^{1/2} x] = 0$$

esto es:

$$\frac{dc_n}{dt} - 4(-E_n)^{3/2}c_n = 0$$

y la solución de esta ecuación es:

$$c_n(t) = c_n(0) \exp \left[4(-E_n)^{3/2}t \right]. \quad (\text{B20})$$

Esta es la segunda de las ecuaciones que aparecen en (A8).

Para obtener las últimas dos ecuaciones que mostramos en (A8) debemos considerar nuevamente la ecuación (B12), pero esta vez para los eigenvalores $\lambda = E > 0$ de la parte continua del espectro.

Para poder encontrar la dependencia temporal de las funciones $a(E,t)$ y $b(E,t)$ mediante la ecuación (B12) es menester entender que en este caso (*i.e.* cuando los eigenvalores $\lambda = E$ están en la parte continua del espectro) *somos libres de elegir la forma de la función λ_t que aparece en (B12)*. Aquí no sucede lo que pasa con la parte discreta del espectro, donde *se demuestra* que $\lambda_t = 0$. En este caso (en el caso continuo), el saber que $\psi(x,t)$ satisface (B8) y $u(x,t)$ satisface (B3) (y tiende a cero conforme $x \rightarrow \pm \infty$), *no determina la dependencia temporal de los eigenvalores*. Esto se entiende mejor si pensamos que (en el contexto de la mecánica cuántica) el potencial por sí sólo no puede determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Para precisar los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión es necesario especificar la energía (*i.e.* el eigenvalor) de la onda incidente.

Consideremos ahora a los eigenvalores $\lambda = E$ como constantes (*i.e.* independientes de t). En tal caso $\lambda_t = 0$ y por consiguiente la ecuación (B12) implica que $\psi_x R - \psi R_x$ es una cantidad que no depende de x . Por lo tanto, tenemos que:

$$\psi_x R - \psi R_x = g(E,t) \quad (\text{B21})$$

donde $g(E,t)$ es una función arbitraria.

Recordemos que estamos considerando que:

$$u \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \psi \rightarrow a(E,t) \exp(-i E^{1/2} x) \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty. \quad (\text{B22})$$

Insertando estos comportamientos en la definición (B11) de $R(x, t)$ vemos que:

$$R(x,t,E) \rightarrow \left(\frac{dA}{dt} + 4i E^{3/2} a \right) \exp(-i E^{1/2} x) \quad (\text{para } x \rightarrow -\infty) \quad (\text{B23})$$

y las expresiones (B22) y (B23) implican que:

$$\psi_x R - \psi R_x \rightarrow 0 \quad (\text{para } x \rightarrow -\infty).$$

Esto nos muestra que la función $g(E,t)$ que aparece en (B21) es idénticamente cero y por lo tanto R/ψ es una cantidad independiente de x , es decir:

$$\frac{R}{\psi} = h(E,t)$$

o lo que es lo mismo:

$$R(x,t,E) = \psi(x,t,E) h(E,t) \quad (\text{B24})$$

donde $h(E, t)$ es una función arbitraria.

La ecuación (B24) es válida para toda x . En particular debe valer cuando $x \rightarrow -\infty$. Por lo tanto, podemos sustituir las expresiones (B22) y (B23) en (B24), lo cual nos conduce a la ecuación:

$$\frac{da}{dt} + 4i E^{3/2} a = a h. \quad (\text{B25})$$

Veamos ahora a qué nos conduce la ecuación (B24) cuando tomamos el límite $x \rightarrow +\infty$. En este caso tenemos que:

$$u \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \psi \rightarrow \exp(-i E^{1/2} x) + b(E,t) \exp(i E^{1/2} x) \quad \text{cuando } x \rightarrow +\infty \quad (\text{B26})$$

y por lo tanto (B11) nos dice que para $x \rightarrow -\infty$:

$$R(x,t,E) \rightarrow \frac{db}{dt} \exp(iE^{1/2}x) + 4iE^{3/2} [\exp(-iE^{1/2}x) - b \exp(iE^{1/2}x)]. \quad (\text{B27})$$

Sustituyendo las expresiones (B26) y (B27) en (B24) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} \exp(iE^{1/2}x) + 4iE^{3/2} [\exp(-iE^{1/2}x) - b \exp(iE^{1/2}x)] = \\ = h [\exp(-iE^{1/2}x) - b \exp(iE^{1/2}x)] \end{aligned} \quad (\text{B28})$$

y como $\exp(iE^{1/2}x)$ y $\exp(-iE^{1/2}x)$ son funciones linealmente independientes, de (B28) se siguen las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{db}{dt} - 4iE^{3/2}b = hb, \quad (\text{B29})$$

$$4iE^{3/2} = h(E,t). \quad (\text{B30})$$

Las ecuaciones (B25) y (B30) implican que:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

y por consiguiente:

$$a(E,t) = a(E,0). \quad (\text{B31})$$

Por otro lado, las ecuaciones (B29) y (B30) implican que:

$$b(E,t) = b(E,0) \exp(8iE^{3/2}t). \quad (\text{B32})$$

Las ecuaciones (B16), (B20), (B31) y (B32) son las que mostramos en (A8) y que no habíamos demostrado en el apéndice anterior. Ahora sabemos cómo se originan estas ecuaciones.

En lo que sigue nos será conveniente escribir los eigenvalores discretos en la forma $\lambda_n = E_n = -\kappa_n^2$ y los eigenvalores continuos en la forma

$\lambda = E = k^2$. Con estas definiciones de κ_n y λ podemos escribir la dependencia temporal de los datos de dispersión en la forma siguiente:

$$E_n(t) = -\kappa_n^2 \quad (\text{B33})$$

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4\kappa_n^3 t) \quad (\text{B34})$$

$$a(k, t) = a(k, 0) \quad (\text{B35})$$

$$b(k, t) = b(k, 0) \exp(8ik^3 t) \quad (\text{B36})$$

TERCERA PREGUNTA

La tercera pregunta que queremos considerar aquí es: ¿cómo se determina el potencial $u(x, t)$ a partir de los datos de dispersión: $E_n(t)$, $c_n(t)$, $a(E, t)$ y $b(E, t)$? La respuesta a esta pregunta fue encontrada por Gel'fand, Levitan y Marchenko (GLM) en la década de los cincuenta [Gel'fand y Levitan 1951; Marchenko 1955]. Los trabajos de GLM mostraron que $u(x, t)$ está dada por:

$$u(x, t) = -2 \frac{dK(x, x; t)}{dx} \quad (\text{B37})$$

donde la función $K(x, y; t)$ es la solución de la ecuación de Marchenko (también conocida como ecuación de Gel'fand-Levitan):

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty K(x, z; t) B(y + z; t) dz = 0, \quad (y > x) \quad (\text{B38})$$

donde $B(\xi, t)$ es la función definida en la forma:

$$B(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k, t) \exp(ik\xi) dk + \sum_n c_n^2(t) \exp(-\kappa_n \xi). \quad (\text{B39})$$

La demostración rigurosa de que las ecuaciones (B37)-(B39) nos dan en verdad la forma del potencial $u(x, t)$ a partir de los coeficientes de normalización y reflexión [$c_n(t)$ y $b(k, t)$] es larga y complicada y el lector interesado puede encontrarla en otros textos [Drazin y Johnson; Eckhaus y Van Harten; Newell; Wadati]. Aquí, más que arrojar al lector dentro de la

demostración completa (lo cual puede ser una experiencia poco agradable), trataremos de presentar una explicación sencilla que le permita al lector alcanzar una comprensión “intuitiva” del origen de las ecuaciones (B37)-(B39) en un tiempo razonable (y sin un sufrimiento excesivo).

Empecemos por mencionar que para potenciales que tienden a cero conforme $x \rightarrow \pm \infty$ todas las soluciones de la ecuación de Schrödinger:

$$\psi_{xx} + [k^2 - u(x)]\psi = 0 \quad (\text{B40})$$

se reducen (cuando $x \rightarrow \pm \infty$) a combinaciones lineales de las funciones e^{ikx} y e^{-ikx} [Lamb p. 46]. Dado, pues, un potencial $u(x)$, podemos expresar todas las soluciones de (B40) como combinaciones lineales de un conjunto de soluciones linealmente independientes, $f_1(x, k)$ y $f_2(x, k)$, que satisfagan los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x, k) = \exp(ikx), \quad (\text{B41})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, k) = \exp(-ikx). \quad (\text{B42})$$

A las soluciones de (B40) que satisfagan estas condiciones se les denomina “soluciones fundamentales” de la ecuación de Schrödinger.

Pongamos ahora atención en la condición (B41). Esta condición sugiere que $f_1(x, k)$ debe poderse expresar en la forma:

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, x') e^{ikx'} dx' \quad (\text{B43})$$

ya que esta expresión satisface la condición (B41). La función $K(x, x')$ debe contener la información del potencial $u(x)$, puesto que $f_1(x, k)$ es solución de (B40). Un poco más adelante veremos cuál es la relación entre $K(x, x')$ y $u(x)$. Antes de estudiar esta relación mostraremos que $K(x, x')$ está relacionada con el coeficiente de reflexión $b(k)$.

Consideremos una onda incidente que viene desde $+\infty$ (en donde se reduce a e^{-ikx}) y que “choca” con el potencial $u(x)$. Como resultado de esta interacción una parte de la onda se reflejará (regresando hacia $+\infty$) y una

parte se transmitirá hacia $-\infty$. La parte reflejada se comportará como $b(k) e^{ikx}$ conforme $x \rightarrow +\infty$ y la parte transmitida se comportará como $a(k) e^{-ikx}$ conforme $x \rightarrow -\infty$. Este proceso de dispersión se puede describir en forma compacta mediante la siguiente ecuación:

$$a(k) f_2(x, k) = b(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k). \quad (\text{B44})$$

Tomemos ahora la transformada de Fourier de la ecuación anterior (con respecto a la variable k). Para poder escribir la ecuación transformada definamos:

$$\bar{B}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik\xi} dk \quad (\text{B45})$$

y notemos que la transformada de (B43) nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, k) e^{ik\xi} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+\xi)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x'}^{\infty} K(x, x') e^{ikx'} e^{ik\xi} dx' dk \\ &= \delta(x + \xi) + \int_{x'=x}^{\infty} K(x, x') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x'+\xi)} dk \right] dx' \end{aligned}$$

es decir:

$$\tilde{f}_1(x, \xi) = \delta(x + \xi) + \int_x^{\infty} K(x, x') \delta(x' + \xi) dx'. \quad (\text{B46})$$

Si ahora definimos la función escalón (la función de Heaviside):

$$\theta(x' - x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x' > x, \\ 0 & \text{si } x' < x, \end{cases} \quad (\text{B47})$$

la ecuación (B46) puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x, \xi) &= \delta(x + \xi) + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x' - x) K(x, x') \delta(x' + \xi) dx' \\ &= \delta(x + \xi) + \theta(-\xi - x) K(x, -\xi).\end{aligned}\quad (\text{B48})$$

En forma similar se muestra que la transformada de $f_1(x, -k)$ es:

$$\tilde{f}_1(x, -\xi) = \delta(x - \xi) + \theta(\xi - x) K(x, \xi). \quad (\text{B49})$$

Usando ahora el teorema de convolución escrito en la forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) f_1(x, k) e^{ik\xi} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(\xi - \xi') \tilde{f}_1(x, \xi') d\xi'$$

podemos ver que la transformada de Fourier (TF) del miembro derecho (MD) de (B44) es igual a lo siguiente:

$$\begin{aligned}TF \text{ del MD} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) f_1(x, k) e^{ik\xi} dk + \tilde{f}_1(x, -\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(\xi - \xi') \tilde{f}_1(x, \xi') d\xi' + \tilde{f}_1(x, -\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(\xi - \xi') [\delta(x + \xi') + \theta(-\xi' - x) K(x, -\xi')] d\xi' \\ &\quad + \delta(x - \xi) + \theta(\xi - x) K(x, \xi) \\ &= \bar{B}(\xi + x) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{B}(\xi + \xi'') \theta(\xi'' - x) K(x, \xi'') d\xi'' \\ &\quad + \delta(x - \xi) + \theta(\xi - x) K(x, \xi)\end{aligned}\quad (\text{B50})$$

esto es:

$$TF \text{ del } MD = \bar{B}(\xi + x) + \int_x^{\infty} \bar{B}(\xi + \xi'') K(x, \xi'') d\xi'' \\ + \delta(x - \xi) + \theta(\xi - x) K(x, \xi) \quad (B51)$$

y para $\xi > x$ tenemos:

$$TF \text{ del } MD = \bar{B}(x + \xi) + K(x, \xi) + \int_x^{\infty} \bar{B}(\xi + z) K(x, z) dz. \quad (B52)$$

Un cálculo similar al que observamos en (B51) muestra que para $\xi > x$ la transformada de Fourier del miembro izquierdo de (B44) es igual a cero, de modo que la transformada de Fourier de (B44) nos conduce a la ecuación:

$$\bar{B}(x + \xi) + K(x, \xi) + \int_x^{\infty} \bar{B}(\xi + z) K(x, z) dz = 0, \quad \xi > x \quad (B53)$$

que tiene exactamente la misma forma que la ecuación de Marchenko (B38). La única diferencia entre (B53) y (B38) es que la función $\bar{B}(\xi)$, definida en (B45), no toma en cuenta los eigenvalores discretos. Cuando estos eigenvalores se toman en cuenta, la función $\bar{B}(\xi)$ se transforma en la función $B(\xi)$ definida en (B39).

Lo que ahora nos falta por entender es cómo se relaciona la función $K(x, x')$ con el potencial $u(x)$. En otras palabras, nos falta entender cómo se origina la ecuación (B37).

Recordemos que la función $K(x, x')$ se introdujo primeramente al escribir la solución fundamental $f_1(x, k)$ de la ecuación de Schrödinger (B40) en la forma (B43). Esta ecuación muestra claramente que $K(x, x')$ sería cero si el potencial fuera nulo, ya que en tal caso la ecuación (B40) se reduciría a:

$$\psi_{xx} + k^2\psi = 0 \quad (B54)$$

y $f_1(x, k) = e^{ikx}$ es solución de esta ecuación. Teniendo esto en mente consideremos la forma de la transformada de Fourier de $f_1(x, k)$ dada en (B48). Si reemplazamos ξ por $-ct$ en esta ecuación y llamamos $y(x, t)$ a la transformada $\tilde{f}_1(x, -ct)$, veremos que se cumple la siguiente ecuación:

$$y(x,t) = \delta(ct-x) + \theta(ct-x)K(x,ct). \quad (\text{B55})$$

En el caso en que el potencial fuera nulo $K(x,ct)$ sería cero (como dijimos arriba) y $y(x,t) = \delta(ct-x)$ sería solución de la ecuación de onda:

$$y_{xx} - \frac{1}{c^2} y_{tt} = 0. \quad (\text{B56})$$

Podemos ver que esta ecuación nos conduce a la ecuación de Schrödinger con potencial nulo (B54) si escribimos $y(x,t) = \psi(x)g(t)$.

Si ahora introducimos un potencial no nulo $u(x)$, la función $y(x,t)$ ya no será solución de (B56), sino de la ecuación de onda modificada [Lamb p. 63]:

$$y_{xx} - \frac{1}{c^2} y_{tt} - u(x)y = 0. \quad (\text{B57})$$

Podemos ver que introduciendo el potencial de esta manera, la ecuación (B57) nos conduce a la ecuación de Schrödinger (B40) mediante la separación de variables $y(x,t) = \psi(x)g(t)$.

Si ahora sustituimos la expresión (B55) en (B57) y recordamos que la derivada de la función de Heaviside nos da la función $\delta(x)$ [Arfken p. 415], obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} & \delta(ct-x) \left[2 \frac{\partial K(x,ct)}{\partial x} + 2 \frac{\partial K(x,ct)}{\partial(ct)} + u(x) \right] \\ & - \theta(ct-x) \left[\frac{\partial^2 K(x,ct)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 K(x,ct)}{\partial t^2} - u(x)K(x,ct) \right] = 0. \quad (\text{B58}) \end{aligned}$$

Integrando esta ecuación sobre el tiempo, desde $(x/c) - \varepsilon$ hasta $(x/c) + \varepsilon$, obtenemos [Lamb p. 85]:

$$2 \frac{\partial K(x,ct)}{\partial x} \Big|_{ct=x} + 2 \frac{\partial K(x,ct)}{\partial(ct)} \Big|_{ct=x} + u(x) = 0 \quad (\text{B59})$$

lo cual se reduce a:

$$u(x) = -2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} \quad (\text{B60})$$

que es precisamente la ecuación (B37), salvo que en ella se indica explícitamente la dependencia temporal de u y K .

Apéndice C

IST y NLS

Hemos mencionado que el interés por la ecuación NLS creció notablemente en 1971, cuando Zakharov y Shabat mostraron que esta ecuación podía resolverse utilizando la idea del método IST (la transformada de dispersión inversa), desarrollado en 1967 por Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM) para resolver la ecuación KdV. Veamos ahora, a muy grandes rasgos, cómo es la resolución de la ecuación NLS mediante el método IST.

Empecemos por observar que la ecuación NLS:

$$iu_z + u_{tt} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (C1)$$

puede escribirse en la forma:

$$(L_z - i[L, A]) \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C2)$$

donde $[L, A]$ es el conmutador $LA-AL$ de los dos operadores diferenciales lineales siguientes:

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}, \quad (C3)$$

$$A = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \begin{bmatrix} uu^* / (1+p) & iu_t^* \\ -iu_t & -uu^* / (1-p) \end{bmatrix}, \quad (C4)$$

donde p está definida por la ecuación $\gamma = 2/(1-p^2)$.

Para convencernos de que la ecuación (C2) coincide realmente con la ecuación (C1) hay que hacer un poco de álgebra. Empecemos por indicar que L_z representa a la derivada de L con respecto a su dependencia *explícita* en z [Drazin y Johnson p. 98] es decir:

$$L_z = \begin{bmatrix} 0 & u_z^* \\ u_z & 0 \end{bmatrix} \quad (C5)$$

y por lo tanto:

$$L_z \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* u_z^* \\ u u_z \end{bmatrix}. \quad (C6)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$A \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} u_{tt} \\ u_{tt}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{uu^*u}{1+p} + iu^*u_t^* \\ -iuu_t - \frac{u^*uu^*}{1-p} \end{bmatrix} \quad (C7)$$

$$L \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} (1+p)u_t \\ (1-p)u_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (u^*)^2 \\ u^2 \end{bmatrix} \quad (C8)$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
\text{LA} \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} &= -ip \begin{bmatrix} (1+p)u_{tt} \\ (1-p)u_{tt}^* \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{u^2 u^*}{1+p} + i u^* u_t^* \\ -i u u_t - \frac{u(u^*)^2}{1-p} \end{bmatrix} \\
&\quad - p \begin{bmatrix} u^* u_{tt}^* \\ u u_{tt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i u u^* u_t - \frac{u(u^*)^3}{1-p} \\ \frac{u^3 u^*}{1+p} + i u u^* u_t^* \end{bmatrix}, \tag{C9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{AL} \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} &= -ip \begin{bmatrix} (1+p)u_{tt} \\ (1-p)u_{tt}^* \end{bmatrix} - p \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 2u^* u_t^* \\ 2u u_t \end{bmatrix} \\
&+ i \begin{bmatrix} u u^* u_t + i(1-p)(u_t^*)^2 \\ -i(1+p)(u_t)^2 - u u^* u_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u(u^*)^3}{1+p} + i u^2 u_t^* \\ -i(u^*)^2 u_t - \frac{u^3 u^*}{1-p} \end{bmatrix}. \tag{C10}
\end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones (C6), (C9) y (C10) y recordando que $\gamma = 2/(1-p^2)$, no es difícil probar que:

$$(L_z - i[L, A]) \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* u_z^* + i u^* u_{tt}^* + i \gamma u (u^*)^3 \\ u u_z - i u u_{tt} - i \gamma u^* u^3 \end{bmatrix} \tag{C11}$$

lo cual muestra que la ecuación (C2) coincide, efectivamente, con la ecuación NLS (C1).

Una vez sabiendo que la ecuación NLS puede escribirse en la forma (C2), el procedimiento seguido por GGKM para resolver la ecuación KdV sugiere que consideremos la ecuación de eigenvalores:

$$L\psi = \lambda\psi \quad (C12)$$

donde:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (C13)$$

Zakharov y Shabat encontraron que era conveniente introducir los siguientes cambios de variables:

$$\psi_1 = (1-p)^{1/2} \exp\left(-i \frac{\lambda}{1-p^2} t\right) v_2, \quad (C14)$$

$$\psi_2 = (1+p)^{1/2} \exp\left(-i \frac{\lambda}{1-p^2} t\right) v_1, \quad (C15)$$

$$q(z,t) = iu(z,t) / (1-p^2)^{1/2}, \quad (C16)$$

$$\zeta = \lambda p / (1-p^2), \quad (C17)$$

pues con estos cambios de variable el problema de eigenvalores (C12) toma la forma más sencilla que vemos a continuación:

$$v_1' + i\zeta v_1 = qv_2, \quad (C18)$$

$$v_2' - i\zeta v_2 = -q^* v_1, \quad (C19)$$

donde las primas indican derivadas respecto al tiempo.

La relación entre el sistema (C18)-(C19) y la ecuación NLS, es análoga a la relación existente entre la ecuación de Schrödinger y la de KdV. Es decir, así como la KdV pudo resolverse estudiando a los eigenvalores, las eigenfunciones y el problema de dispersión asociados a la ecuación de

Schrödinger, la NLS puede resolverse analizando los eigenvalores, las eigenfunciones y el problema de dispersión asociados al sistema (C18)-(C19).

Notemos que si suponemos que $q \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ y consideramos que el eigenvalor ζ es igual a un valor real ξ , entonces para $t \rightarrow \pm\infty$, el sistema (C18)-(C19) se reduce al sistema simplificado:

$$v_1' + i\xi v_1 = 0, \quad (\text{C20})$$

$$v_2' - i\xi v_2 = 0, \quad (\text{C21})$$

de manera que para $t \rightarrow \pm\infty$ tendremos que:

$$v_1 \rightarrow \exp(-i\xi t) \quad (\text{o bien } v_1 \rightarrow 0), \quad (\text{C22})$$

$$v_2 \rightarrow \exp(i\xi t) \quad (\text{o bien } v_2 \rightarrow 0). \quad (\text{C23})$$

Ahora bien: el *problema de dispersión* asociado al sistema (C18)-(C19) consiste en estudiar a las soluciones de dicho sistema que se aproximen (conforme $t \rightarrow \pm\infty$) a las soluciones del sistema simplificado (C20)-(C21) [Butkov pp. 628-629]. Supongamos, pues, que elegimos un eigenvalor real $\zeta = \xi$ y un cierto “potencial” $q(z,t)$ y obtenemos una solución $v(t,\xi,z)$ del sistema (C18)-(C19) cuyo comportamiento para $t \rightarrow \pm\infty$ sea el siguiente:

$$v(t,\xi,z) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a(\xi,z) \exp(-i\xi t) \\ b(\xi,z) \exp(i\xi t) \end{bmatrix} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (\text{C24})$$

$$v(t,\xi,z) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \exp(-i\xi t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty. \quad (\text{C25})$$

Los coeficientes $a(\xi,z)$ y $b(\xi,z)$ se pueden determinar para cualquier valor del eigenvalor real ξ y juegan el papel que tenían los coeficientes de

transmisión y reflexión que mencionamos en el apéndice anterior al considerar el comportamiento asintótico de las eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger.

Zakharov y Shabat demostraron que si $u(z,t)$ es solución de la ecuación NLS (C1), entonces la función $a(\xi,z)$ no depende de z , es decir:

$$a(\xi, z) = a(\xi, 0) \equiv a(\xi), \quad (\text{C26})$$

y observaron que si $u(z,t)$ (y por consiguiente también q) tiende a cero suficientemente rápido conforme $t \rightarrow \pm\infty$, entonces el dominio de la función $a(\xi)$ puede extenderse a la mitad superior del plano complejo y la función extendida $a(\zeta) = a(\xi+i\eta)$ resulta ser analítica y tiene un número finito de ceros [Ablowitz *et al.* 1974]. Es decir, existe un número finito de valores $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ (con $\eta_n > 0$) tales que $a(\zeta_n) = 0$ y para cada uno de estos valores ζ_n es posible hallar una solución del sistema (C18)-(C19) que se comporte cuando $t \rightarrow \infty$ de la siguiente manera:

$$v(t, \zeta_n, z) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ c_n(z) \exp(i\zeta_n t) \end{bmatrix}. \quad (\text{C29})$$

Así pues, una vez dado el “potencial” inicial $q(0,t)$ (es decir, una vez dada la condición inicial $u(0,t)$ de la ecuación (C1)), podemos calcular el siguiente conjunto de valores:

$$S(0) = \{ \zeta_n(0), c_n(0), a(\xi, 0), b(\xi, 0) \}, \quad n = 1, \dots, N, \quad -\infty \leq \xi \leq \infty, \quad (\text{C28})$$

los cuales constituyen los llamados “datos de dispersión” (“scattering data”) asociados al problema (C18)-(C19). A continuación, exigiendo que $u(z,t)$ sea solución de la ecuación NLS (C1) y siguiendo un procedimiento similar al que nos condujo a las ecuaciones (B33)-(B36) del apéndice anterior, se encuentra que:

$$\zeta_n(z) = \zeta_n(0) \equiv \zeta_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (\text{C29})$$

$$a(\xi, z) = a(\xi, 0) \equiv a(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad (\text{C30})$$

$$b(\xi, z) = b(\xi, 0) \exp(4i\xi^2 z), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad (\text{C31})$$

$$c_n(z) = c_n(0) \exp(4i\zeta_n^2 z), \quad n = 1, \dots, N. \quad (\text{C32})$$

Finalmente, Zakharov y Shabat mostraron que a partir de los datos de dispersión:

$$S(z) = \{ \zeta_n, c_n(z), a(\xi), b(\xi, z) \} \quad (\text{C33})$$

es posible calcular la forma del nuevo potencial $q(z, t)$, con lo cual se obtiene la solución $u(z, t)$ de la ecuación NLS (C1). Para obtener $q(z, t)$ a partir de los datos de dispersión (C33) se sigue un procedimiento completamente análogo al que se sigue para resolver el problema de dispersión inverso correspondiente a la ecuación de Schrödinger. Como explicamos en el apéndice anterior, este procedimiento se basa en los trabajos de Gel'fand, Levitan y Marchenko [Gel'fand y Levitan 1951; Marchenko 1955] y conduce a la ecuación de Marchenko (B38).

Bibliografía

- Abdullaev F., *Theory of Solitons in Inhomogeneous Media* (Wiley, Chichester, England, 1994).
- Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. y Segur H., *Studies in Applied Math.* **53** (1974) 249.
- Ablowitz M.J. y Segur H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981).
- Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P. y Khokhlov R.V., *Sov. Phys. JETP* **23**(1966) 1025 [*J. Exptl. Theoret. Phys.* **50** (1966) 1537].
- Akhmediev N.N. y Ankiewicz A., *Solitons: Nonlinear pulses and beams* (Chapman & Hall, London, 1997).
- Agrawal G.P., *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 1989).
- Agrawal G.P., *Nonlinear Fiber Optics*, Third Edition (Academic Press, San Diego, 2001).
- Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1970).
- Asano N., Taniuti T. Y Yajima N., *J. Math. Phys.* **10** (1969) 2020.
- Bender C.M. y Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).
- Bellamy J., *Digital Telephony* (Wiley, New York, 1991).
- Benney D.J. y Newell A.C., *Journal of Mathematics and Physics* **46** (1967) 133.
- Brigham E.O., *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974).
- Bullough R.K. y Caudrey P.J., *Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- Butkov E., *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968).
- Copson E.T., *Asymptotic Expansions* (Cambridge University Press, London, 1965).
- Davis H.T., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations* (Dover, New York, 1962).

- Drazin P.G. y Johnson R.S., *Solitons: an Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- Dwight H.B., *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* (McMillan, New York, 1961).
- Eckhaus W. y Van Harten A., *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons* (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- Fujioka J. y Espinosa A., J. Phys. Soc. Japan **66** (1997) 2601.
- Gabitov I., Shapiro E.G. y Turitsyn S.K., Phys. Rev. E **55** (1997) 3624.
- Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. y Miura R.M., Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1095.
- Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M., *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, San Diego, 1994).
- Gustafson K.E., *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods* (Wiley, New York, 1987).
- Hardin R.H. y Tappert F.D., SIAM Rev. (Chronicle) **15** (1973) 423.
- Hasegawa A. y Tappert F., Appl. Phys. Lett. **23** (1973) 142.
- Hecht J., *Understanding Fiber Optics* (Sams Publishing, Indianapolis, 1993).
- Hecht E. y Zajac A., *Optics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1974).
- Hirota R., Phys. Rev. Lett. **27** (1971) 1192.
- Hirota R., J. Phys. Soc. Japan **33** (1972) 1456.
- Hirota R., J. Phys. Soc. Japan **33** (1972) 1459.
- Hirota R., J. Math. Phys. **14** (1973) 805.
- Hirota R., en *Solitons*, editado por R.K. Bullough y P.J. Caudrey (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
- Kao K.C. y Hockham G.H., Proc. IEE *113* (1966) 1151.
- Kapron F.P., Keck D.B. y Maurer R.D., Appl. Phys. Lett. **17** (1970) 423.
- Karpman V.I. y Krushkal' E.M., Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55** (1968) 530 [Sov. Phys. JETP **28** (1969) 277].
- Keiser B. y Strange E., *Digital Telephony and Network Integration* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1985).
- Kelley P.L., Phys. Rev. Lett. **15** (1965) 1005.
- Kestin J. y Dorfman J.R., *A Course in Statistical Thermodynamics* (Academic Press, New York, 1971).
- Korteweg D.J. y de Vries G., Phil. Mag. **39** (1895) 422.
- Kruskal M.D. y Clarkson P.A., Stud. Appl. Math. **86** (1992) 87.
- LA TÉCNICA, Volumen de extensión de la Enciclopedia Internacional

- Focus (Ed. Argos, Barcelona, 1968).
- Lamb G.L. (Jr.), *Elements of Soliton Theory* (Wiley, New York, 1980).
- Landau L.D. y Lifshitz E.M., *Quantum Mechanics*, Third Edition (Pergamon Press, Oxford, 1977).
- Lax P.D., *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467.
- Matsuno Y., *Bilinear Transformation Method* (Academic Press, Orlando, 1984).
- Miura R.M., *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1202.
- Miura R.M., *Solitons in Action* (Cap. 1), editado por K. Lonngren y A. Scott (Academic Press, New York, 1978).
- Miura R.M., Gardner C.S. y Kruskal M.D., *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1204.
- Miya T., Terunuma Y., Osaka T. y Miyoshita T., *Electron. Lett.* **15** (1979) 106.
- Mollenauer L.F., Stolen R.H. y Gordon J.P., *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1095.
- Newell A.C., *Solitons in Mathematics and Physics* (Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1985).
- Newell A.C. y Moloney J.V., *Nonlinear Optics* (Addison-Wesley, Redwood City, C.A., 1992).
- O'Reilly J.J., *Principios de telecomunicaciones* (Addison-Wesley, Wilmington, Delaware, 1994).
- Pitaevskii L.P., *J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR)* **40** (1961) 646-651 [*Sov. Phys. JETP* **13** (1961) 453].
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., *Numerical Recipes in FORTRAN* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
- Ramani A., Grammaticos B. y Bountis T., *Phys. Reports* **180** (1989) 159.
- Reif F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (Mc Graw-Hill, New York, 1965).
- Segur H., *Physica D* **51** (1991) 343.
- Stolen R.H. y Lin C., *Phys. Rev. A* **17** (1978) 1448.
- Taha T.R. y Ablowitz M.J., *J. Comput. Phys.* **55** (1984) 203.
- Taniuti T. y Washimi H., *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 209.
- Taniuti T. y Yajima N., *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1369.
- Tappert F.D. y Judice C.N., *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 1308.
- Tappert F.D. y Varma C.M., *Phys. Rev. Lett.* **25** (1970) 1108.
- Wadati M., *Generalized Matrix Form of the Inverse Scattering Method*, en *Solitons*, editado por Bullough R.K. y Caudrey P.J. (Springer-Verlag,

- Berlin Heidelberg, 1980).
- Weiss J., Tabor M. y Carnevale G., *J. Math. Phys.* **24** (1983) 522.
- Wells G.W., *Electronic and Communications* (Longman, Hong Kong, 1973).
- Zabusky N.J. y Kruskal M.D., *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240.
- Zakharov V.E., *Sov. Phys. J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9** (1968) 190 [*Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki* **9** (1968) 86-94].
- Zakharov V.E., (Editor), *What is Integrability?* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- Zakharov V.E. y Shabat A.B., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61** (1971) 118 [*Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 62].
- Zvérev V.A., *Radioóptica* (Mir, Moscú, 1978).

Índice alfabético

- Akhmanov, 12
ancho de banda, 22
atenuación, 16, 22
- bajas temperaturas, 11
Burgers, 100
- cables submarinos, 30, 68
código binario, 23, 25, 26
conductividad térmica, 91
constante de propagación, 39
cuantización de una señal, 23, 24
- chirp, 63
- Debye, 91
decibelios, 16
dispersión anómala, 61, 68
dispersión normal, 61
- ecuación modificada de KdV, 104
ecuaciones de Maxwell, 31
ecuaciones integrables, 89
efecto GVD, 57, 67
efecto SPM, 69, 70
espectro electromagnético, 21, 22
- fase estacionaria, 64
Fermi, 12, 90, 91
fibras ópticas, 11, 15, 53, 54, 61
frecuencia de cero dispersión, 61
- Gardner, 13, 96, 98, 103, 105, 119
Gel'fand, 112, 125
GVD, 57, 67, 75
- Hasegawa, 15
- Heaviside, 114, 117
- IST, 13, 14, 79, 89, 99, 101, 103, 119
- Kao, 16
Kelley, 11
Korteweg-de Vries, 12, 89, 90
Kruskal, 12
- Lax, 100
líneas telefónicas analógicas, 25
longitud de cero dispersión, 61
longitud de dispersión, 51
longitud de mínima atenuación, 42
longitud no lineal, 51
luz visible, 15, 21
- Marchenko, 112, 125
Miura, 104
Mollenauer, 17
muestreo, 23, 24
multiplexión, 25
- ondas en agua, 12
- Pasta, 12, 90, 91
Pitaevskii, 11
propagación de calor, 14
- recurrencia de FPU, 91, 95
Riccati, 104
- Scott Russell, 90
SiO₂, 19
sistemas telefónicos
analógicos, 22

digitales, 29, 30
solitón, 11, 54, 55, 89
solitones brillantes, 48, 79
solitones oscuros, 48, 79
soluciones fundamentales, 113
SPM, 69, 70, 75
superfluidez, 11
Taniuti, 14
Tappert, 14, 15, 79, 80
telecomunicaciones, 11, 15, 17, 21
teorema de convolución, 115
tiempo retardado, 40
transformación de Miura, 104
transformada rápida de Fourier, 84
triple conjunción, 11, 19
Ulam, 12, 90, 91
voz telefónica, 21, 22
Zabusky, 12, 92, 93, 95, 96
Zakharov, 14, 79, 89, 119