Caminos mínimos y burbujas de jabón

Dra. Clara Eugenia Garza Hume
IIMAS-UNAM

Resumen

Mostramos cómo las películas y burbujas de jabón pueden utilizarse para visualizar y "resolver" algunos problemas matemáticos en forma sencilla y divertida.

Abstract

We show how soap films and bubbles may be used to visualize and solve some math problems in a fun and simple way.

Palabras clave: superficies mínimas, caminos mínimos, Cálculo de Variaciones, burbujas de jabón, películas de jabón.

Introducción

Las burbujas y películas de jabón proporcionan uno de los muchos ejemplos de objetos de la vida diaria que mirados con cuidado llevan a plantear preguntas muy interesantes y pueden llevar a descubrimientos importantes. Las referencias [2] y [3] son excelentes introducciones al tema, aquí sólo hablaremos de unos cuantos ejemplos.

Empezaremos mencionando un hecho muy bien conocido pero cuya demostración matemática requiere algo más que cálculo y después veremos cómo las películas de jabón dan una demostración muy sencilla del hecho conocido y de otros no tan conocidos.

Matemáticas

Todo mundo sabe que el camino mínimo (más corto) entre dos puntos es la recta que los une. Para probar este hecho matematicamente se usa una herramienta llamada *Cálculo de Variaciones*.

En los cursos de Cálculo se aprende a encontrar *puntos* críticos, máximos, mínimos o puntos sillas de funciones. Para encontrar un *camino* mínimo hay que encontrar una *función* que minimiza una "función de funciones", es decir, un *funcional.*

Para encontrar el camino mínimo entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) hay que escribir la distancia a lo largo de cualquier curva que una a los dos puntos dados y encontrar el mínimo de ese funcional. Es usualmente el primer ejercicio que se resuelve en un curso de Cálculo de Variaciones.

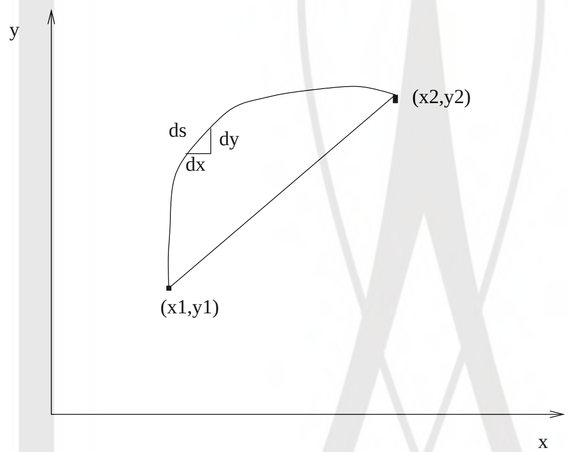

Figura 1: Camino mínimo entre dos puntos y variación del camino

Por el teorema de Pitágoras, el elemento de distancia está dado por

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}.$$

La longitud total del camino que une (x_1, y_1) con (x_2, y_2) es

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_1}^{x_2} [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx. \end{aligned}$$

Necesitamos el mínimo de s. Para encontrarlo se escribe el camino arbitrario como

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

donde α es un parámetro y $\eta(x)$ es una función arbitraria tal que

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Luego se deriva con respecto al parámetro y se evalúa en $\alpha = 0$. Se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0,$$

con $f = (1 + y_x^2)^{1/2}$. Como f no depende explícitamente de y esto se reduce a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right) = 0,$$

e integrando

$$\frac{\partial f}{\partial y_x} = K,$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial y_x}(1 + y_x^2)^{1/2} = K.$$

Esto implica que $y_x = m$ e integrando se obtiene

$$y = mx + c,$$

la ecuación de una recta.

Aún el caso más sencillo requiere cierto trabajo.

Jabón y matemáticas

¿Y qué tienen que ver las burbujas de jabón? Son parientes de la películas de jabón que tienen mucho que ver con los caminos mínimos.

Si uno sumerge en una solución jabonosa dos placas de acrílico unidas por dos tornillos, al sacar las placas se forma una película de jabón entre los tornillos y las placas cuya *área* es la mínima posible. Si la separación de las placas es constante esto nos da tambien la mínima *distancia* entre los dos tornillos. En la fotografía se observa que se forma un rectángulo entre las placas y los dos tornillos y la proyección de eso sobre uno de los acrílicos es precisamente la recta que une los dos tornillos. Es decir, el agua con jabón encontró la distancia mínima entre dos puntos.

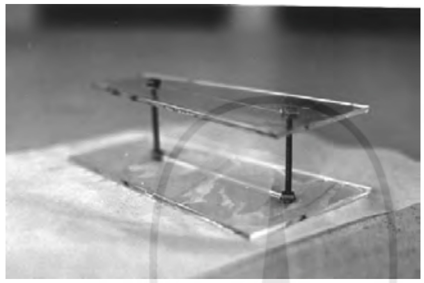

Figura 2: Película de jabón mostrando el camino mínimo entre dos puntos

¿Qué sucederá ahora si en vez de dos puntos tenemos cuatro? ¿ Cuál será el camino más corto que une a los cuatro puntos?

Esto ya no es tan conocido aunque es un resultado clásico.

Por simplicidad supongamos que los cuatro puntos se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado 1. Entonces el primer camino que mostramos mide 4. Es claro que puede quitarse un lado y todavía se tiene un camino que une los 4 puntos pero mide 3. El camino en forma de X mide $2\sqrt{2} = 2.83$. El camino en forma de H mide 3.

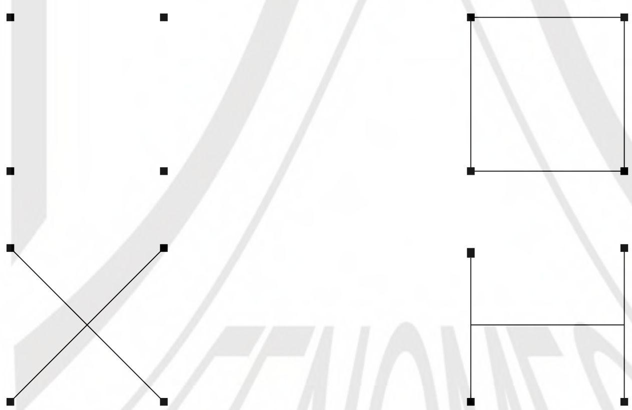

Figura 3: Algunos posibles caminos entre 4 puntos

¿Habrá un camino más corto?

Si uno trata de resolver el problema usando Cálculo de Variaciones se tropieza con un problema, hay que suponer que el camino se puede expresar como una gráfica de una función diferenciable. Pero de todos los caminos que se ocurren, hay muchos que no cumplen ese requisito.

¿Qué pasa si se le "pregunta" a la película de jabón? "Responde"que hay un camino más corto, el que se muestra en la figura 4.

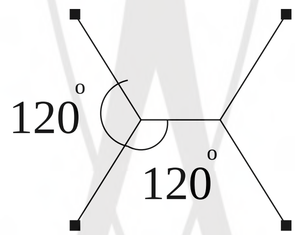

Figura 4: Camino más corto entre cuatro puntos

Esta configuración tiene dos puntos en los que se unen 3 caminos haciendo un ángulo de 120^o. Usando trigonometría se puede calcular la longitud de este camino que es $1 + \sqrt{3} = 2.73$. Efectivamente este camino mide menos que los que mostramos en la figura 3.

Para otras configuraciones y otros números de puntos el camino mínimo tiene uniones de 3 caminos a 120^o grados y la película de jabón lo encuentra facilmente.

¿Qué pasa si hay restricciones? Si se quiere encontrar el camino mínimo digamos entre 3 puntos pero que no pase por un lago ?

El problema se puede resolver nuevamente usando películas de jabón. La restricción se impone haciendo una perforación en el acrílico.

En general, las películas de jabón encuentran la superficie mínima subtendida por una frontera dada. En términos matemáticos la ecuación que hay que resolver es no lineal y no trivial y además los métodos clásicos del Cálculo de Variaciones sólo encuentran las soluciones dadas en forma de función.

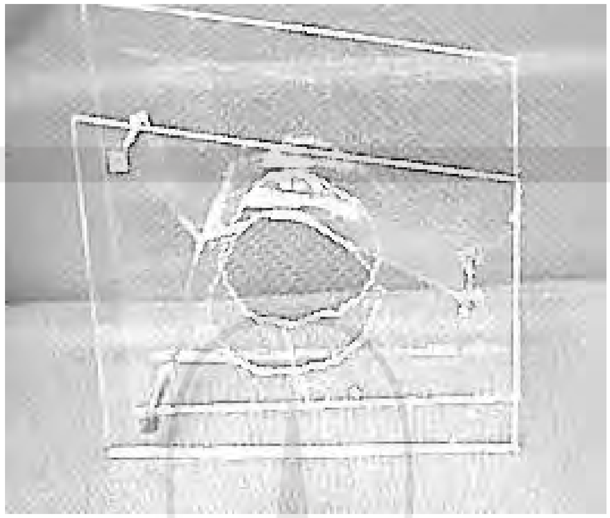

Figura 5: Camino mínimo entre tres puntos con restricción.

Lo que observó Plateau hace más de 100 años fue que en las películas de jabón si se intersectan los planos lo hacen con ángulos de 120^o y las líneas resultantes se intersectan formando un ángulo de cerca de 109^o.

Esto se observa muy claramente sumergiendo un tetrahedro en una solución jabonosa como se observa en la figura 6.

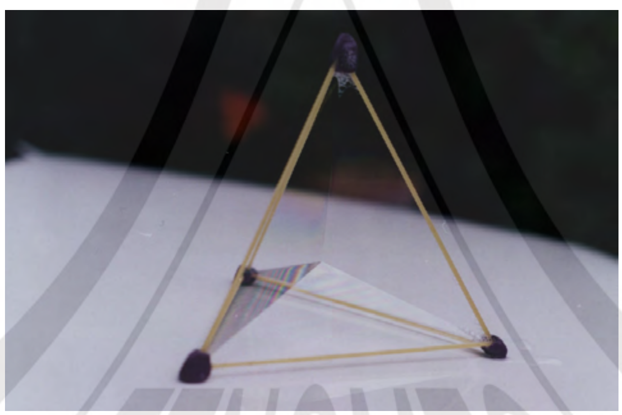

Figura 6: Tetrahedro con película de jabón.

El tratar de entender la superficies mínimas que no pueden verse como superficies tradicionales fue parte de la motivación para desarrollar teorías matemáticas muy complejas como la Teoría Geométrica de la Medida, el concepto de *varifolio*, de *corriente minimizante* etc.

Las observaciones de Plateau motivaron trabajo matemático fundamental de Jesse Douglas en los 30's que le dio la Medalla Fields y la prueba completa requirió nueva y poderosa herramienta, en parte desarrollada por F. Almgren, Jr. y se logró en los 70's por Jean Taylor.

Las películas de jabón se siguen usando para estudiar el problema no lineal y muy complicado de la turbulencia en flujos "casi" bidimensionales.

La espuma también presenta problemas importantes no lineales y no resueltos.

Los colores de las burbujas sólo pueden explicarse completamente usando Mecánica Cuántica.

Conclusión

Algo tan sencillo, tan bonito y tan conocido como las burbujas y las películas de jabón puede ser, si se mira con cuidado, fuente de muchas preguntas y muchas respuestas interesantes.

Nota práctica: Para hacer experimentos puede usarse una mezcla de agua limpia (algunos dicen destilada), un poco de jabón líquido para trastes y un poco de glicerina pura. Una versión dice una taza de agua, media de glicerina y un par de cucharadas de jabón pero las cantidades exactas no son críticas. Para las películas de jabón basta con un par de cucharadas de glicerina por cada taza de agua. Para hacer burbujas más grandes y duraderas sí es necesario usar más glicerina.

Si se hacen figuras de alambre debe usarse alambre forrado para que se adhiera el jabón. También pueden usarse palillos unidos con plastilina o spaghetti (crudo).

Referencias

[1] Almgren, F. Jr., Taylor, J, *The geometry of soap films and soap bubbles*, Scientific American, julio 1976.

[2] Boys, C.V. *Soap bubbles their colours and the forces which mould them*, Dover, New York 1959.

[3] Hildebrandt, Stefan y Tromba, Anthony, *Matematica y formas optimas* Barcelona, espana : Prensa cientifica, 1990 (Traduccion de: mathematics and optimal form , de Scientific American Books)

[4] Isenberg, C. *The science of soap films and soap bubbles*, Dover 1992.

[5] Nitsche, J. *Plateau's problems and their modern ramifications*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 945–968.

[6] Talyor, J. *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces*, Annals of Math **103** (1976), pp. 489-539.