

The background features a large, light gray watermark of the FENOMEC logo. It consists of a rectangular frame containing a stylized figure with a pointed top and a wide, curved base. Below the figure, the word 'FENOMEC' is written in a bold, stylized, sans-serif font.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 6 MODELOS MATEMÁTICOS

Jose Luis Abreu
José Ángel Canavati
Jorge Ize
Antonmaria Minzoni

<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. LEY DE NEWTON | 3 |
| 1.1. MOVIMIENTO VERTICAL PROVOCADO POR LA GRAVEDAD | 5 |
| 1.2. OSCILADOR ARMÓNICO | 9 |
| 1.3. TIRO PARABÓLICO | 17 |
| 1.4. LA DOBLE RUEDA DE LA FORTUNA | 24 |
| 1.5. LEYES DE KEPLER Y LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL | 27 |
| 1.6. GRAVEDAD, LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL Y MÉTODO DE CAPAS | 35 |
| 2. ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES | 47 |
| 2.1. LEYES DE POBLACIONES DE MALTHUS Y DE VERHULST | 47 |
| 2.2. REACTORES NUCLEARES | 53 |
| 2.3. UN DISPOSITIVO MECÁNICO Y DOBLE INTEGRACIÓN POR PARTES | 55 |
| 2.4. RESISTENCIA DEL AIRE Y MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES | 59 |
| 2.5. OSCILACIONES AMORTIGUADAS | 69 |
| 2.6. PÉNDULO | 73 |
| INDICE ALFABETICO | 78 |

PRÓLOGO

Al llegar a este último fascículo de la serie de cálculo diferencial e integral, el estudiante debe poder manejar el cálculo con soltura; además, deberá haber estudiado varios ejemplos de aplicaciones del cálculo.

En este fascículo presentamos una variedad de extensiones, refinamientos y aplicaciones de la teoría, demostrando así la fuerza y utilidad del cálculo diferencial e integral. Si el estudio y la interpretación física de la segunda derivada eran un tema casi obligado, la selección de los otros temas no fue tarea fácil. Muchos lectores se quejarán de no encontrar algún ejemplo que les parezca fundamental o se extrañarán de ver tratadas aplicaciones que no se estudian a este nivel o que aparentan una dificultad matemática demasiado grande para el conocimiento del estudiante. Aceptamos de antemano las críticas y asumimos este último riesgo, pero antes quisiéramos explicar nuestros motivos.

Las razones para no incluir todas las posibles aplicaciones del cálculo son de espacio, claramente, de gustos y conocimientos de los autores, pero fundamentalmente son consecuencia de lo que podríamos llamar una “filosofía del cálculo”. En efecto, tomando en cuenta el hecho de que la mayoría de nuestros lectores no se dedicarán al estudio de las matemáticas abstractas, consideramos necesario dar un panorama amplio de las posibilidades del instrumento que hemos expuesto, evitando definiciones abstractas, no tratando formalmente temas clásicos como series, sucesiones o integrales impropias por requerir más conocimientos matemáticos antes de llegar a aplicaciones de valor y concentrándonos en lo que nos parece más importante entre las consecuencias inmediatas del cálculo; es decir, el concepto de modelos dinámicos, esencialmente con ecuaciones diferenciales.

El primer capítulo trata de un modelo muy respetado: la ley de Newton. Vemos así la interpretación física de la segunda derivada, los problemas de la caída libre y del oscilador armónico, siendo este último el primer ejemplo “serio” de una ecuación diferencial cuya solución es analizada con mucho detalle. Vemos después varios ejemplos de movimiento en el plano, tratando de explicar lo más posible el concepto de los vectores aceleración y velocidad en el problema del tiro parabólico y esperando que la introducción de coordenadas polares, para estudiar las leyes de Kepler y de gravitación universal, no causen mayores complicaciones. Completamos el capítulo con el cálculo de volúmenes por el método de capas y el cálculo de una integral múltiple.

El segundo capítulo desarrolla modelos distintos de la ley de Newton, dando algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales, como las leyes de crecimiento de poblaciones, el control de un reactor nuclear, los problemas de resistencia del aire en una caída libre y de oscilaciones amortiguadas y el movimiento del péndulo. También aquí, aprovechamos los ejemplos para discutir los métodos de integración por fracciones parciales, por doble uso de integración por partes y de integración de una serie.

Concluimos con una advertencia: aún más que en los fascículos anteriores pretendemos motivar al lector antes de presentar una técnica o conceptos nuevos. Por esta razón, presentamos primero algunos ejemplos, formalizando después la parte matemática y, en muchos casos, no enfatizamos este último punto. Esto por varios motivos: en primer lugar por falta de espacio y por considerar que el tema no pertenecía estrictamente al cálculo, como, por ejemplo, en el caso de los vectores y de coordenadas polares, o por pensar que no valdría la pena a este nivel dedicar un estudio más completo a este tema, como en el caso de series, sucesiones, integrales múltiples y, en algunos ejemplos, derivadas parciales. En segundo lugar, la omisión fue hecha con el propósito de invitar al lector a ampliar sus conocimientos y aclarar sus dudas en otros textos, ya que uno de los fines de esta serie es el evitar plantear problemas artificiales y con la solución *predigerida* con la ayuda de recetas; más bien tratamos de invitar al lector a que se plantee sus propias dudas, dándole los instrumentos básicos para resolverlas.

Finalmente, la conclusión lógica de nuestro punto de vista, es que la dificultad de los ejemplos es variable; no pretendemos que el lector asimile en una primera lectura todos los conceptos, sobre todo no matemáticos, expuestos en este fascículo. Más bien lo invitamos a una lectura reposada, con retornos frecuentes a los otros fascículos y a la búsqueda de información adicional en otros libros.

Capítulo 1

LEY DE NEWTON

Uno de los modelos matemáticos más importantes para nuestro entendimiento de la física fue descubierto por Newton y es éste el fundamento de la dinámica. Para entender la ley de Newton, recordemos primero lo que es la velocidad de un punto que se mueve sobre un eje. Si la posición del punto está dada cada instante por la función $x(t)$, sabemos que $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ es la velocidad del punto (figura 1.1)

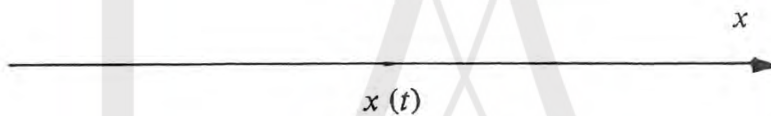


Figura 1.1

Así pues, cuando $x'(t)$ es positiva, el punto se mueve hacia la derecha, y si $x'(t_0)$ es cero, pasando de positiva a negativa, $x(t)$ tiene un máximo en t_0 y el punto móvil se regresa. Por ejemplo, si graficamos la distancia de un coche sobre la carretera México-Acapulco, tomando como origen la ciudad de México, podemos tener algo del estilo mostrado en la figura 1.2.

Entre el momento C y el momento D , el automovilista se para a comer en Chilpancingo. En E se dio cuenta que se le habían olvidado sus lentes en el restaurante y se regresa. Aprovecha su estancia en Chilpancingo para llenar el tanque de gasolina y a partir de G concluye su viaje sin problemas.

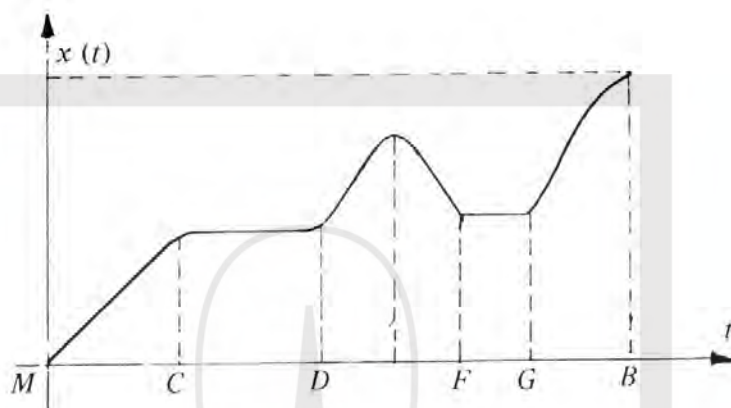


Figura 1.2

Ejercicios

- 1.1 Una locomotora hace maniobras de patio. Su movimiento está dado por

$$x(t) = t^4 - 6t^3 + 9t^2 \quad (t \text{ en horas, } x(t) \text{ en kms.})$$

Determine los movimientos de la locomotora.

- 1.2 El pie de un caballito de feria tiene un movimiento vertical de la forma

$$h(t) = 1 - \text{sen } t$$

Determine su velocidad vertical y los momentos en que sube.

Si la primera derivada $x'(t)$ representa la velocidad del punto móvil ¿cuál es la interpretación física de $x''(t)$? Es la derivada de la velocidad, indicando cómo la velocidad aumenta o disminuye, según el signo de $x''(t)$, y se llama la *aceleración* del punto móvil. Esta cantidad se “siente” cuando uno va en un coche: al acelerar, es decir, al aumentar la velocidad, uno se siente empujado hacia atrás, mientras que al frenar uno es proyectado hacia adelante. Esta relación entre las variaciones de la velocidad, o sea la aceleración, y la fuerza que uno siente, producida por el motor, es justamente la ley de Newton.

Esa fuerza, que corresponde al esfuerzo que uno hace al variar la velocidad de un cuerpo, por ejemplo al lanzar una piedra, se expresa por un número si el movimiento es rectilíneo, y en general por un vector. Lanzando piedras de diferente peso, con el mismo esfuerzo, producimos distintas aceleraciones, más pequeñas conforme el peso es más grande. Podemos entonces decir que la aceleración γ es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional al peso:

$$\gamma = g \frac{F}{p}$$

$\frac{p}{g}$ se llama la *masa m* del objeto y obtenemos así la ley de Newton:

$$F = m\gamma$$

Por ejemplo, como hemos visto en el fascículo I, los cuerpos que caen son sometidos a la fuerza de gravedad, es decir, al peso. En este caso:

$$F = -p = \frac{p}{g}\gamma$$

Por lo tanto:

$$\gamma = -g$$

Experimentalmente se puede calcular esa constante $g : 9,81m/s^2$. (Las unidades son en metros por segundos cuadrados, ya que la aceleración es una segunda derivada con respecto al tiempo de una distancia).

Como todo modelo, la ley de Newton debe ser comprobada experimentalmente para tener confianza en su validez. Veremos a continuación varios ejemplos.

1.1. MOVIMIENTO VERTICAL PROVOCADO POR LA GRAVEDAD

En el fascículo I vimos que si dejamos caer una piedra desde un edificio de altura h_0 , el movimiento estaba dado por:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

con velocidad $h'(t) = -gt$, negativa porque h disminuye, y aceleración $h''(t) = -g$.

¿Qué pasa si arrojamos primero el objeto para arriba, es decir, si le damos una velocidad inicial v_0 ? ¿Cuál será la altura máxima a la que llegará? ¿Cuándo llegará a la altura h_0 y cuándo tocará el suelo?

La única fuerza que actúa sobre el objeto una vez lanzado es su peso. Según la ley de Newton la aceleración será:

$$h''(t) = -g.$$

Por el teorema fundamental:

$$h'(t) = -gt + cte.$$

Como la velocidad inicial es $v_0 = h'(0)$, entonces:

$$h'(t) = -gt + v_0.$$

De nuevo, por el teorema fundamental:

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + cte.$$

y, siendo $h(0) = h_0$,

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0.$$

Entonces $h(t)$ será máxima si $h'(t) = -gt + v_0 = 0$, es decir, para $t = \frac{v_0}{g}$ teniendo en cuenta el signo de $h'(t)$ y el hecho de que tomamos v_0 positivo.

$$h_{\max} = h\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} + h_0.$$

Por ejemplo, si $v_0 = 10\text{ m/s}$, $h_{\max} = h_0 + \frac{100}{2g} \simeq h_0 + 5,1\text{ m}$.

La piedra llegará al nivel h_0 cuando $h(t) = h_0$, es decir:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t, \quad \text{por lo tanto} \quad t = \frac{2v_0}{g}.$$

La piedra tarda el mismo tiempo en subir que en bajar, y podemos notar que su velocidad en $t_0 = \frac{2v_0}{g}$ será:

$$-gt_0 + v_0 = -v_0.$$

La misma velocidad que la inicial pero de signo contrario.

Dejamos como ejercicio el determinar el momento de su llegada al suelo ($h(t) = 0$) y su velocidad (figura 1.3).

Ejercicios:

- 1.3 Una piedra es arrojada verticalmente hacia abajo desde una altura de 10 metros y con una velocidad de 1 m/s (cuidado con el signo v_0). ¿Cuándo y con qué velocidad llega al suelo?
- 1.4 Se quiere mandar una pelota a 10 metros de alto. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial?

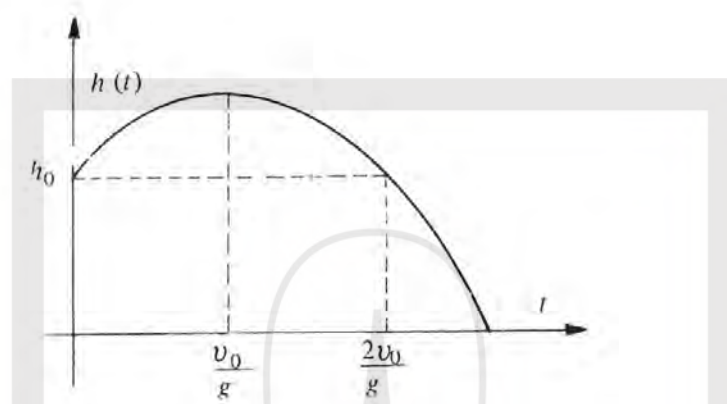


Figura 1.3

- 1.5 Se deja caer una piedra en un pozo de 30 metros de profundidad. Un segundo después, se lanza una segunda piedra. ¿A qué velocidad debe uno lanzar la segunda piedra para que las dos piedras lleguen al fondo al mismo tiempo?

Problema 1.1: El pintor

En el ejemplo 1.4 del capítulo 1 del fascículo III, teníamos a un pintor sobre una escalera de 5 metros de largo, cuya base resbalaba a una velocidad de 20 cm/s (figura 1.4)

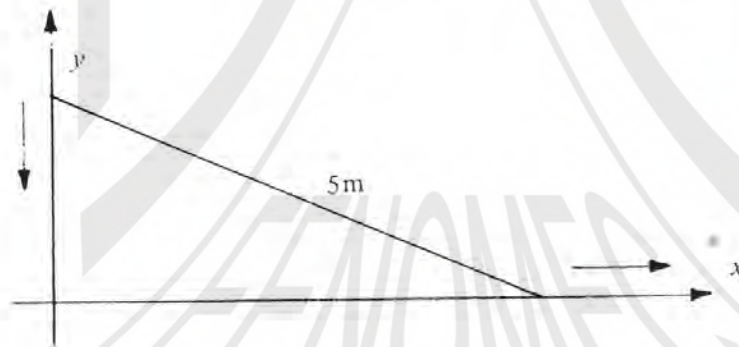


Figura 1.4

Vimos entonces que, como $y = \sqrt{25 - x^2}$, la velocidad con la cual la punta de la escalera iba cayendo era:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}(\sqrt{25 - x^2}) \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{y} \frac{dx}{dt}$$

Por lo tanto, si $\frac{dx}{dt}$ permanece en 0.2 m/s, queda claro que $\frac{dy}{dt}$ será infinita cuando y valga cero. El pintor se va a matar si se queda todo el tiempo sobre la escalera. Es necesario saltar, ¿pero cuándo debe hacerlo para que el golpe, es decir, la velocidad en el momento de llegar al suelo, sea lo más suave posible?

Supongamos, pues que en el momento $t = 0$, el pintor decide saltar desde la altura y_0 , con velocidad inicial $v_0 = -\frac{0,2x_0}{y_0}$, velocidad de la escalera en ese momento. Entonces su caída será de la forma

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

- Calcule el momento t_0 de la llegada al suelo, $y = 0$, recordando que t_0 debe ser positivo.
- Calcule la velocidad a la llegada, v_1 , y exprese la en función de y_0 . (Respuesta: $v_1 = -\left(\frac{1}{y_0^2} + 2gy_0 - 0,04\right)^{1/2}$).
- Encuentre el mínimo de la función $v_1(y_0)$ e interprete el resultado. (Respuesta: el mínimo es alcanzado en $y_0 = g^{-1/3}$).

Problema 1.2: Pistón de locomotora

Un pistón está diseñado como en la figura 1.5 donde la rueda tiene un metro de radio y la varilla que la une al pistón tiene 4 metros.

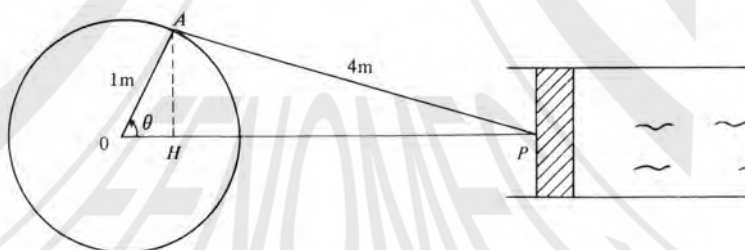


Figura 1.5

La rueda tiene un movimiento uniforme con una velocidad angular de 1 rad/s, es decir, que da una vuelta completa en 2π segundos. Si suponemos que el ángulo θ vale 0 en el instante inicial, θ es igual a t . Por razones de seguridad se quiere conocer la velocidad y la aceleración del pistón en el cilindro.

- Pruebe que $OP = \cos t + \sqrt{16 - \sin^2 t}$
- Calcule $\frac{dOP}{dt}$ y $\frac{d^2OP}{dt^2}$. Grafique estas dos funciones, dando estimaciones sobre la localización de sus ceros y el valor de sus extremos.

1.2. OSCILADOR ARMÓNICO

Supongamos que tenemos un peso colgado de un resorte (figura 1.6)

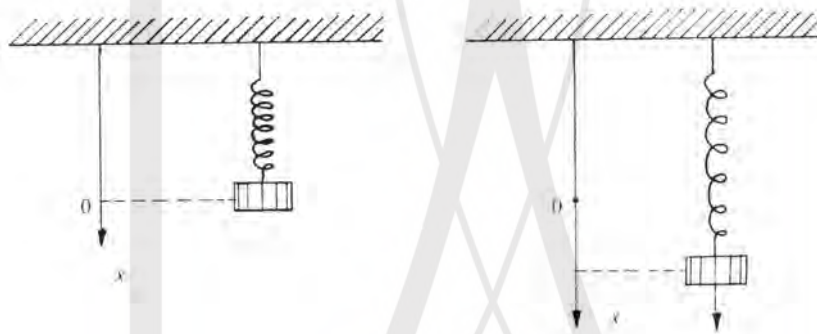


Figura 1.6

Si lo jalamos hacia abajo, el resorte ejerce una fuerza contraria, más fuerte mientras más alejado está de la posición de reposo. Del mismo modo, si uno comprime el resorte, éste ejercerá una fuerza opuesta, más fuerte mientras más comprimimos. Experimentalmente se puede medir esa fuerza con un dinamómetro y se puede ver que es proporcional a la elongación o acortamiento del resorte y opuesta.

Es decir, si x es la elongación del resorte

$$F = -kx,$$

donde k representa el factor de proporcionalidad y el signo menos indica que la fuerza es opuesta.

Ahora bien, si soltamos el resorte, éste empieza a oscilar con un movimiento periódico. Se puede comprobar experimentalmente que si el peso es mayor, las

oscilaciones son más lentas y que, si el resorte es más rígido, las oscilaciones son más rápidas.

Veamos cómo la ley de Newton nos confirma estos resultados. Si la posición del resorte al tiempo t es $x(t)$, su velocidad será $\frac{dx}{dt}$ y su aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$; la ley de Newton se escribe entonces:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx,$$

donde m es la masa del cuerpo colgado del resorte.

Para completar los datos del problema, debemos indicar qué tanto separamos el resorte al tiempo inicial, es decir $x(0) = x_0$, y cuál fue la velocidad que le dimos $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$.

Tenemos que resolver, entonces, el problema:

Encontrar $x(t)$ que cumpla con:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

La ecuación se llama una ecuación diferencial ya que involucra a la función y sus derivadas. Para resolverla, tenemos a nuestra disposición el teorema fundamental del cálculo, que nos indica que la solución a la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

es

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s)ds.$$

Tratemos pues de reducir nuestra ecuación de tal forma que tengamos una sola derivada. Si multiplicamos la ecuación por $\frac{dx}{dt}$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} x = 0$$

es decir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{k}{m} \frac{1}{2} x^2 \right) = 0$$

Por lo tanto, la cantidad:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{m} x^2 \equiv E(0) \text{ es constante :}$$

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_0^2$$

$mE(t)$ se llama la *energía* del sistema, $\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ correspondiendo a la *energía cinética* y $\frac{1}{2} kx^2$ a la *energía potencial*.

La ecuación:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2E(0) - \frac{k}{m} x^2,$$

es de primer orden en $x(t)$, pero tiene la desventaja de que $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ aparece al cuadrado. Resolveremos primero la ecuación en un *caso particular*: $x_0 > 0, v_0 = 0$.

Entonces:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{m} (x_0^2 - x^2)$$

Como $\frac{d^2x}{dt^2}(0) = -\frac{k}{m}x_0$ es negativa, entonces $\frac{dx}{dt}$ decrece y por lo tanto, será negativa para t cercano a 0. El peso es soltado en la posición $x(0) = x_0$ e irá hacia arriba, es decir, $x(t)$ disminuye y por lo tanto $\frac{dx}{dt}$ seguirá negativa por lo menos hasta que lleguemos a la posición $x = -x_0$, donde la velocidad será cero (figura 1.7).

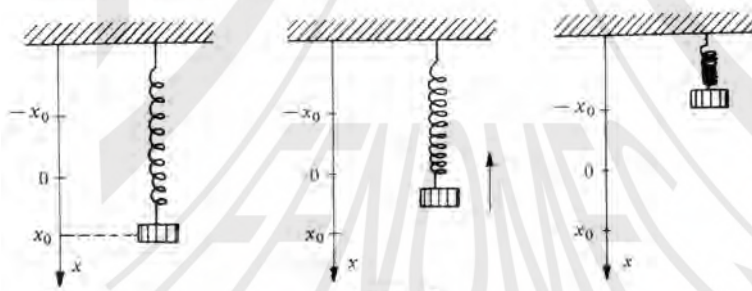


Figura 1.7

$$\text{Entonces, } \frac{dx(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_0^2 - x^2(t)}$$

$$x(0) = x_0,$$

o bien:

$$-\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para integrar esta ecuación, recordemos que, como lo vimos en el fascículo V, capítulo I, sección 1.2:

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{Arccos} \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}$$

Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} (\operatorname{Arccos} \theta(t)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}} \frac{d\theta}{dt}$$

y por ende:

$$\frac{d}{dt} \left(\operatorname{Arccos} \frac{x(t)}{a} \right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dx}{dt}$$

Al integrar la ecuación, obtenemos:

$$\operatorname{Arccos} \frac{x(t)}{x_0} \Big|_0^t = \sqrt{\frac{k}{m}} t \Big|_0^t$$

Es decir:

$$\operatorname{Arccos} \frac{x(t)}{x_0} - \operatorname{Arccos} 1 = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Recordando ahora que Arccos u está definida para u entre -1 y 1 , tendremos, para $x(t)$ mayor que $-x_0$:

$$\frac{x(t)}{x_0} = \cos \left(\operatorname{Arccos} \frac{x(t)}{x_0} \right) = \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

de donde $x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$.

Esta fórmula vale para $0 \leq \sqrt{\frac{k}{m}} t \leq \pi$, es decir:

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{m}{k}} \pi,$$

ya que cuando $t = \sqrt{\frac{m}{k}} \pi = t_1$, $x(t_1) = -x_0$ y $\frac{dx}{dt}(t_1) = 0$.

De la ecuación:

$$0 \leq \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{k}{m} (x_0^2 - x^2),$$

vemos que $|x(t)|$ es siempre menor o igual a $|x_0|$. Por lo tanto, el cuerpo deberá alejarse de la posición $-x_0$ con velocidad positiva, ya que $\frac{d^2x}{dt^2}(t_1) = -\frac{k}{m}x(t_1) = \frac{k}{m}x_0$ es positiva para t cercano a t_1 : $\frac{dx}{dt}$ crece y, siendo cero en t_1 deberá ser positiva para t un poco mayor que t_1 . Entonces, la ecuación que vale para x entre $-x_0$ y x_0 será:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

$$x \left(\sqrt{\frac{m}{k}} \pi \right) = -x_0.$$

Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Y recordando que:

$$\frac{d}{dt} \left(\text{Arcsen} \frac{x(t)}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dx}{dt},$$

obtenemos:

$$\text{Arcsen} \frac{x(t)}{x_0} - \text{Arcsen} \frac{x(t_1)}{x_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_1).$$

Como $x(t_1) = -x_0$ y $\text{Arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$:

$$\text{Arcsen} \frac{x(t)}{x_0} = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k}{m}} \left(t - \sqrt{\frac{m}{k}} \pi \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{3\pi}{2}$$

$$x(t) = x_0 \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{3\pi}{2} \right) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

para $\sqrt{\frac{m}{k}} \pi \leq t \leq 2\sqrt{\frac{m}{k}} \pi$.

Cuando $t = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \pi$ la situación es la misma que al tiempo inicial y el proceso se repite. La solución será entonces:

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

representando una oscilación de *período*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{es decir, } x(t+T) = x(t) \text{ para todo } t)$$

y *amplitud* (máximo desplazamiento con respecto al equilibrio) x_0 . Vemos aquí que si m aumenta o si k disminuye, el periodo es más largo y las oscilaciones más lentas.

En el *caso general*, tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2E - \frac{k}{m}x^2} \quad \text{si } v_0 \text{ es positiva}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2E - \frac{k}{m}x^2} \quad \text{si } v_0 \text{ es negativa.}$$

En el *primer caso*, la ecuación:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\frac{2Em}{k} - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

tiene como solución:

$$\text{Arcsen} \left(\frac{x(t)}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right) - \text{Arcsen} \left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right) = \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Es decir,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \text{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \text{Arcsen} \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right)$$

para t entre 0 y

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsen} \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right) = t_2.$$

Entonces,

$$x(t_2) = \sqrt{\frac{2Em}{k}}, \quad \frac{dx}{dt}(t_2) = 0$$

y estamos en el caso anterior:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \cos\left(\frac{k}{m}(t - t_2)\right)$$

para t mayor que t_2 .

Sustituyendo el valor de t_2 :

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \operatorname{Arccsen}\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}}\right) \text{ para todo } t.$$

En el segundo caso, de la ecuación:

$$\frac{-\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\frac{2Em}{k} - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

obtenemos:

$$\operatorname{Arccos}\frac{x}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} - \operatorname{Arccos}\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Es decir,

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \operatorname{Arccos}\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right)$$

$$\text{para } t \text{ entre } 0 \text{ y } t_3 = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\pi - \operatorname{Arccos}\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}} \right)$$

momento en el cual el cuerpo está en la posición $-\sqrt{\frac{2Em}{k}}$ con solución para tiempos posteriores:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_3) - \frac{\pi}{2}\right)$$

como ya lo hemos visto.

Entonces usando las fórmulas de adición concluimos que

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Em}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \operatorname{Arccos}\frac{x_0}{\sqrt{\frac{2Em}{k}}}\right) \text{ para todo } t.$$

Para concluir con este ejemplo, veremos otra manera de llegar a estas fórmulas: Es fácil ver, por simple sustitución, que $x_1(t) = \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$ y $x_2(t) = \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$ satisfacen la ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

y por lo tanto cualquier función de la forma:

$$a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

es también solución de

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

con a y b dos constantes arbitrarias.

Ahora bien, supongamos por un momento que el problema

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

tuviera dos soluciones $\bar{x}(t)$ y $\tilde{x}(t)$. Consideremos entonces la diferencia de esas dos soluciones:

$$x(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$$

La función $x(t)$ es solución del problema:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = 0$$

y si consideramos su energía como lo hicimos antes:

$$mE(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = mE(0) = 0.$$

La única manera de que esta suma de cuadrados sea cero es que: $\frac{dx}{dt} = 0$ y $x = 0$ todo el tiempo.

Por lo tanto, $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t)$ y la solución es única.

No basta entonces encontrar una solución a nuestro problema para saber que esa será la solución buscada. Ahora bien, como $a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$ es solución de la ecuación diferencial, determinemos las constantes a y b de tal modo que $x(0) = x_0$ y $\frac{dx}{dt}(0) = v_0$. Si podemos hacerlo, tendremos la solución.

Como $x(0) = a$ y $\frac{dx}{dt}(0) = b\sqrt{\frac{k}{m}}$ la solución es:

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Ejercicio 1.6

Usando la regla de suma para cosenos y senos verifique que la solución encontrada con el primer método es la misma que esta última fórmula, recordando que: $\text{Arcsen } \theta + \text{Arccos } \theta = \frac{\pi}{2}$ y que $\text{Arccos } \theta$ varía entre 0 y π de tal modo que $\text{sen}(\text{Arccos } \theta) = \sqrt{1 - \theta^2}$.

1.3. TIRO PARABÓLICO

En la sección 1.1 hemos visto qué es lo que pasa si lanzamos una piedra verticalmente. ¿Qué pasa si la lanzamos oblicuamente? ¿Cuál será la altura máxima, el alcance máximo, cuándo caerá de nuevo al suelo?

El problema, conocido bajo el nombre de tiro parabólico, es puesto en general en términos de tiro de cañón ya que una de sus principales aplicaciones fue a la artillería.

El lanzar la piedra con cierto ángulo implica que la piedra tendrá una cierta velocidad inicial vertical y una cierta velocidad horizontal según el ángulo θ_0 al cual la lanzamos.

Si v_0 es la magnitud de la velocidad, la velocidad horizontal será $v_H = v_0 \cos \theta_0$ y la vertical $v_v = v_0 \sin \theta_0$.

Podemos representar esto diciendo que la velocidad es un vector $\vec{v} = (v_H, v_v) = (v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0)$ con dos componentes. Podemos pensar en ese vector como una flecha que empieza en el origen y termina en el punto $(v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0)$ tal como se ve en la figura 1.8.

Además, en cada punto P de la trayectoria hay un vector de velocidad que representamos con una flecha que empieza en P , de longitud v formando un ángulo θ con el eje x (figura 1.9).

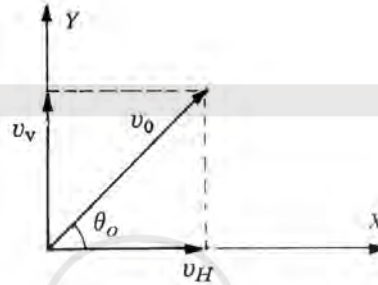


Figura 1.8

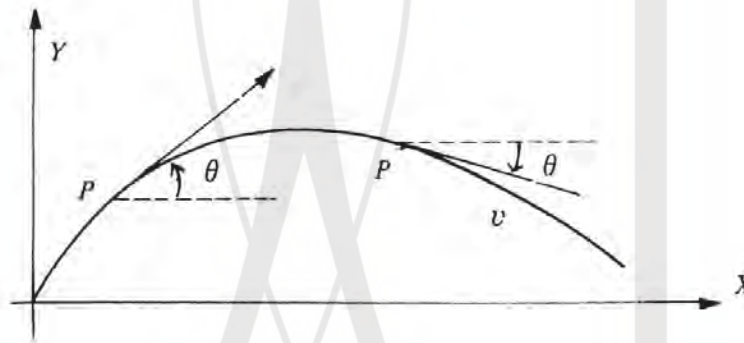


Figura 1.9

Este vector tendrá por lo tanto una componente horizontal, velocidad en la dirección x , con valor $v_H = v \cos \theta$ y, una componente vertical, con valor $v_v = v \sin \theta$.

Podemos entonces escribir el vector velocidad como:

$$\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta) = (v_H, v_v)$$

Del mismo modo, el vector aceleración tendrá en cada punto de la trayectoria una componente horizontal Γ_H y una componente vertical Γ_v , mientras que la fuerza que actúa sobre el móvil tendrá componentes F_H y F_v .

La ley de Newton $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ es decir: $(F_H, F_v) = m(\Gamma_H, \Gamma_v)$, significa

$$F_H = m\Gamma_H$$

$$F_v = m\Gamma_v.$$

Es entonces claro que si el punto P tiene coordenadas $(x(t), y(t))$ la velocidad horizontal será $\frac{dx}{dt}$ y la vertical $\frac{dy}{dt}$, mientras que $\Gamma_H = \frac{d^2x}{dt^2}$ y $\Gamma_v = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Aquí, la única fuerza que actúa sobre la piedra, después del lanzamiento, es su peso, el cual es vertical dirigido hacia abajo:

$$\vec{F} = (0, -mg)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}x''(t) &= 0 \quad (\text{No hay fuerza horizontal}) \\my''(t) &= -mg.\end{aligned}$$

Usando el teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned}x'(t) &= x'(0) = v_0 \cos \theta_0 \\y(t) &= -gt + y'(0) = -gt + v_0 \operatorname{sen} \theta_0\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}x(t) &= (v_0 \cos \theta_0)t \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t\end{aligned}$$

suponiendo $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Obtenemos pues:

$$\begin{aligned}t &= \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \\y &= -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} + (\tan \theta_0)x\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una *parábola* (figura 1.10), con vértice en

$$x = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0, \quad y = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}^2 \theta_0$$

obtenido al tiempo

$$t = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \theta_0,$$

ya que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} x + \tan \theta_0.$$

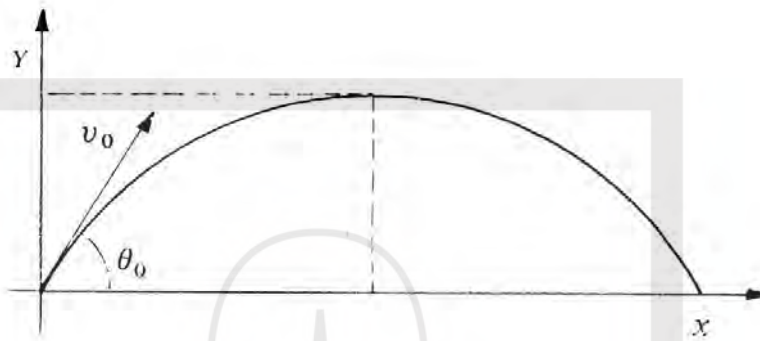


Figura 1.10

La piedra caerá al suelo, $y = 0$, en $x = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$.

Entonces, para una velocidad v_0 dada, el ángulo bajo el cual debe lanzarse la piedra para que llegue lo más lejos posible será tal que $\frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$ sea máxima como función de θ : como su derivada con respecto a θ_0 es $\frac{2v_0^2}{g}(\cos^2 \theta_0 - \operatorname{sen}^2 \theta_0) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\theta_0$, el *alcance máximo* será para $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ con valor de $\frac{v_0^2}{g}$.

Por ejemplo si $v_0 = 10\text{m/s}$, bastará estar a más de 10.2 m del lanzador para estar fuera de alcance.

Notemos que la tangente en el punto de impacto, $\frac{dy}{dx}$, para $x = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \theta_0$, es $-\tan \theta_0 = \tan(-\theta_0)$: El *ángulo de llegada* es el mismo, en valor absoluto, que el *ángulo de salida*; esto se debe tomar en cuenta para tiros de mortero.

Es interesante interpretar y describir el resultado que hemos obtenido en términos de vectores. Tomemos en primer lugar el vector:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (v_0 \cos \theta_0 t, v_0 \operatorname{sen} \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2)$$

y dibujémoslo para todos los valores de t : vemos que la punta del vector se mueve sobre la parábola

$$y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0$$

ya que este vector nos da la posición de la piedra en cada instante (figura 1.11)

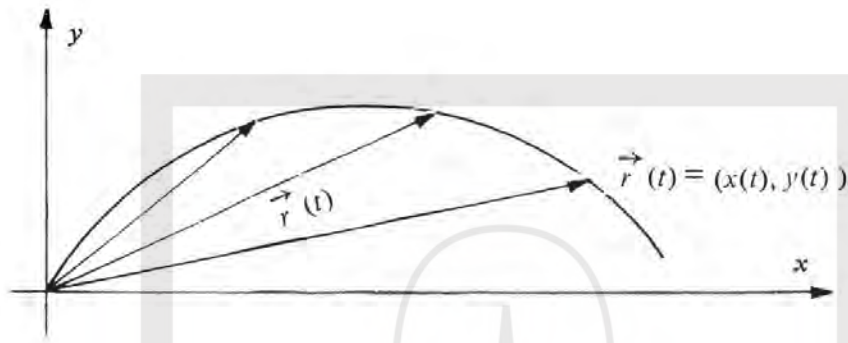


Figura 1.11

Sabemos también que la velocidad horizontal es $x'(t)$ y la vertical es $y'(t)$. Pero ya que

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

y

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

entonces el vector:

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)$$

es aproximado, para h pequeño, por el vector

$$\frac{\Delta \vec{r}(t)}{h} = \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)$$

En la figura 1.12, vemos que el vector:

$$\Delta \vec{r}(t) = (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))$$

es la diferencia entre la posición del móvil en el instante $t+h$ y la posición en el instante t .

Vemos así que el vector $\frac{\Delta \vec{r}}{h}$, colineal al vector $\Delta \vec{r}$, tiende, cuando h tiende a cero, a un vector que empieza en $\vec{r}(t)$ y es *tangente* a la trayectoria, representando el vector velocidad $\vec{v}(t)$ de la piedra.

Finalmente, el vector aceleración $(x'', y'') = (0, -g)$ representa el cambio del vector velocidad.

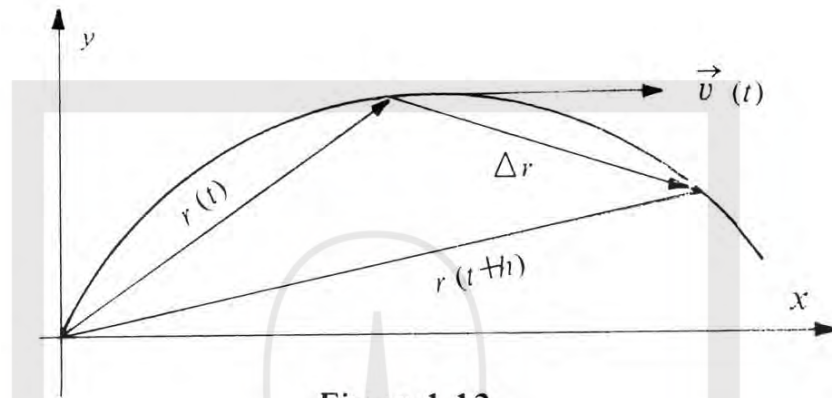


Figura 1.12

Aquí $\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t) = (0, -gh)$ es vertical y apunta hacia abajo (figura 1.13), como se puede ver fácilmente de las expresiones para $x'(t)$ y $y'(t)$.

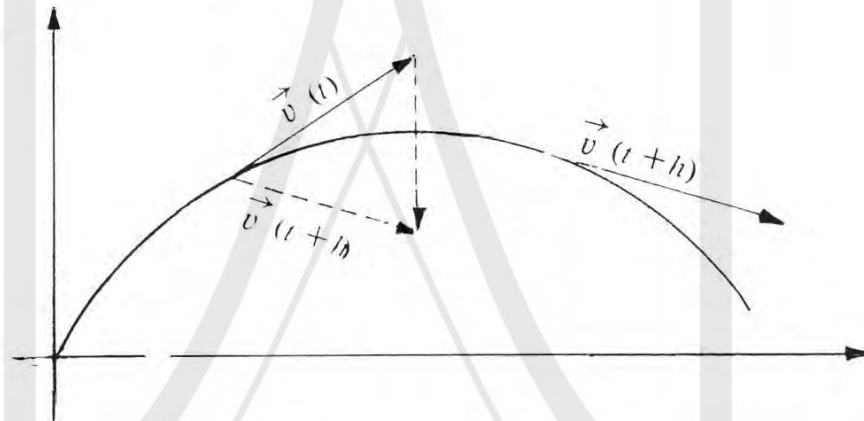


Figura 1.13

Ejercicios:

1.7 El récord de lanzamiento de jabalina es de 76 m. ¿Cuál fue, por lo menos, la velocidad v_0 que dio el lanzador a la jabalina?

1.8 Calcule la velocidad al momento del impacto: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

1.9 Un cañón está al borde de un acantilado, 100 metros arriba de un valle. Sabiendo que el cañón dispara sus proyectiles a 100 m/s, ¿a qué distancia debe uno estar del acantilado para permanecer fuera del alcance? Se procederá de la manera siguiente:

- Escriba de nuevo la ecuación de Newton.
- Calcule $x(t)$ y $y(t)$ teniendo cuidado con las constantes de integración.
- Se expresará y en función de x , obteniendo una parábola.
- Se encontrará el rango del cañón, el punto x tal que y sea 0, en función de θ_0 .
- Se maximizará ese rango como función de θ_0 .

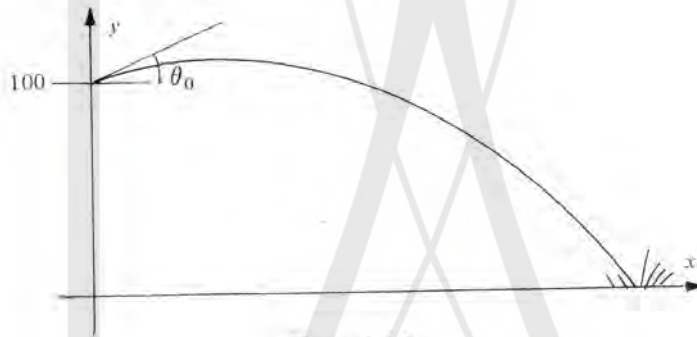


Figura 1.14

1.10 Una canica rueda sobre un plano inclinado, bajo la acción de su peso. ¿Cuál es la distancia recorrida desde el momento que se suelta al tiempo $t = 1s$? Proceda de la manera siguiente:

- Vea que la fuerza que jala la canica sobre el plano inclinado vale $-g \sin \theta = F$.
- Vea que $s(t) = \frac{-g}{2} \sin \theta t^2$, a partir de la ley de Newton.

Para familiarizar más al lector con los conceptos de *vector velocidad* y de *vector aceleración* veremos un ejemplo simple antes de emprender el estudio del movimiento planetario.

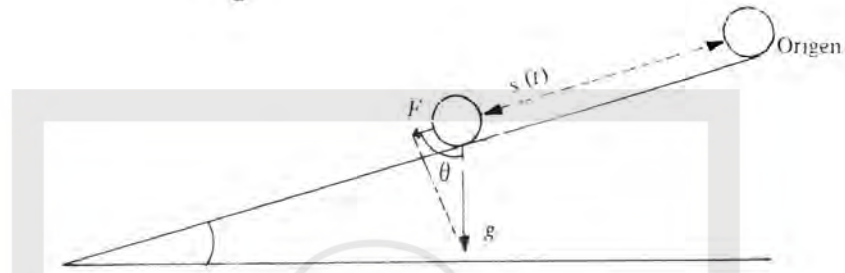


Figura 1.15

1.4. LA DOBLE RUEDA DE LA FORTUNA

Consideremos una doble rueda de la fortuna donde el eje principal gira como lo indica la figura 1.16 y las dos ruedas al revés.

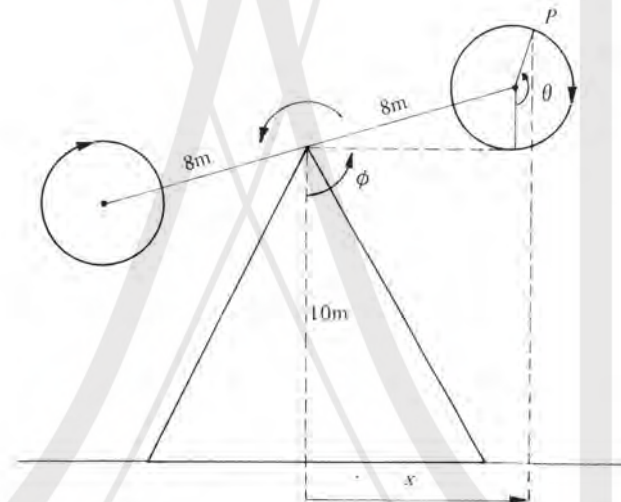


Figura 1.16

Cada eje tiene 8 metros de largo y el radio de las ruedas es de 2 metros. El eje da una vuelta en un minuto mientras que las ruedas completan una vuelta en medio minuto, a velocidad constante. Podemos entonces, en cada instante, encontrar la altura h de la silla P , en función de los ángulos ϕ y θ :

$$h = 10 + 8 \operatorname{sen} \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \operatorname{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$h = 10 - 8 \cos \phi - 2 \cos \theta$$

Si en el momento inicial, θ y ϕ son cero, de tal modo que una pareja se pueda subir a la silla: $h(0) = 0$, vemos que $\phi = 2\pi t$, ya que al cabo de un minuto, $t = 1$, ϕ dió una vuelta completa, y $\theta = -4\pi t$, θ dio dos vueltas; en sentido contrario. Entonces:

$$h(t) = 10 - 8 \cos 2\pi t - 2 \cos 4\pi t$$

De igual manera:

$$x = 8 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 8 \operatorname{sen} \phi + 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$x(t) = 8 \operatorname{sen} 2\pi t - 2 \operatorname{sen} 4\pi t$$

$h'(t)$ será la velocidad vertical de la silla y $h''(t)$ su aceleración vertical, mientras que $x'(t)$ y $x''(t)$ serán la velocidad y aceleración horizontales. Claramente:

$$h'(t) = 8\pi(2 \operatorname{sen} 2\pi t + \operatorname{sen} 4\pi t)$$

$$h''(t) = 32\pi^2(\cos 2\pi t + \cos 4\pi t)$$

$$x'(t) = 8\pi(2 \cos 2\pi t - \cos 4\pi t)$$

$$x''(t) = 32\pi^2(-\operatorname{sen} 2\pi t + \operatorname{sen} 4\pi t)$$

Como $h'(t) = 16\pi \operatorname{sen} 2\pi t(1 + \cos 2\pi t)$ y tiene el signo de $\operatorname{sen} 2\pi t$, $h(t)$ es máximo para $t = \frac{1}{2}$ y mínimo para $t = 0$ y $t = 1$ con altura máxima 16 metros; la silla sube entre $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}$, baja entre $t = \frac{1}{2}$ y $t = 1$.

Notemos que todas las expresiones son periódicas con período 1, es decir, la silla regresa a su posición inicial al cabo de un minuto. Del mismo modo:

$$x'(t) = -16\pi((\cos 2\pi t)^2 - \cos 2\pi t - \frac{1}{2})$$

$$x'(t) = -16\pi \left(\cos 2\pi t - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos 2\pi t - \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \right).$$

Como $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ es mayor que 1, $x(t)$ crece, es decir, la silla va hacia la derecha para t entre 0 y t_0 tal que $\cos 2\pi t_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, con $x(t_0) = \sqrt{6\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} \simeq 8.88$, $h(t_0) = 4 + 6\sqrt{3} \simeq 14.4$.

Después la silla va hacia la izquierda, pasa por $x = 0$ en $t = \frac{1}{2}$, y llega a un mínimo en el tiempo $1 - t_0$, con $x(1 - t_0) = -x(t_0)$, $h(t_0) = h(1 - t_0)$.

Dejemos como ejercicio el comprobar estos resultados estudiando la función $x'(t)$.

Igualmente se comprobará que $h''(t) = 32\pi^2(2 \cos 2\pi t - 1)(\cos 2\pi t + 1)$ dando una velocidad vertical máxima en $t = \frac{1}{6}$ de subida y mínima en $t = \frac{5}{6}$ de bajada con $h'(\frac{1}{6}) = 8\pi\sqrt{3} = -h'(\frac{5}{6})$ y $h(\frac{1}{6}) = 7, x(\frac{1}{6}) = 3\sqrt{3}$. Finalmente $x''(t) = 32\pi^2 \sin 2\pi t (2 \cos 2\pi t - 1)$ da un valor máximo para $x'(t)$ en $t = \frac{1}{6}$, con $x'(\frac{1}{6}) = 16\pi$, un mínimo en $t = \frac{1}{2}$ con $x'(\frac{1}{2}) = -24\pi$ y un nuevo máximo en $t = \frac{5}{6}$ con $x'(\frac{5}{6}) = 16\pi$. Se estudiarán también los máximos y mínimos de las aceleraciones vertical y horizontal. Con toda esta información podemos graficar la trayectoria de la silla: la silla sube hasta el tiempo $t = \frac{1}{2}$ teniendo una posición lateral máxima en el momento $t = t_0$. Después, como $h(1-t) = h(t)$, $x(1-t) = -x(t)$ la gráfica será simétrica con respecto al eje h (figura 1.17).

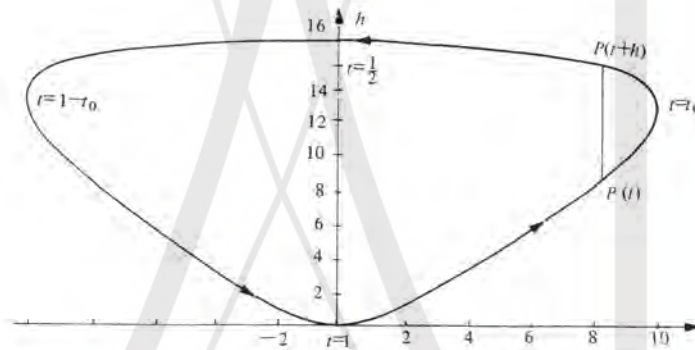


Figura 1.17

Notemos, aquí también, para concluir que si $(x(t), h(t))$ es un punto $P(t)$ sobre la trayectoria y considerando $(x(t+h), h(t+h)) = P(t+h)$, al tomar:

$$\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)$$

tenemos una cuerda entre los puntos $P(t+h)$ y $P(t)$. Al hacer tender h a cero, $P(t+h)$ va hacia $P(t)$ y la cuerda tiende a la tangente a la trayectoria: Vemos entonces que $(x'(t), h'(t))$ es un vector tangente a la curva: El vector velocidad con componentes horizontal y vertical $x'(t)$ y $h'(t)$ respectivamente.

Del mismo modo el vector aceleración $(x''(t), h''(t))$, que ya no es tangente a

la curva, es igual, por la ley de Newton, a la fuerza ejercida por la rueda de la fortuna sobre la silla dividida por su masa.

Invitamos al lector que calcule el módulo del vector aceleración: $\sqrt{x''^2(t) + h''^2(t)}$ viendo en qué momento es mayor.

1.5. LEYES DE KEPLER Y LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Basándose en las observaciones astronómicas de *Tycho Brahe* principalmente, *Johannes Kepler* modificó el sistema planetario de Copérnico resumiendo su teoría en tres proposiciones:

1. Los planetas giran alrededor del Sol en órbitas de forma elíptica y el Sol se encuentra precisamente en uno de los focos de cada órbita elíptica.
2. El radio vector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semi-ejes principales de las órbitas correspondientes.

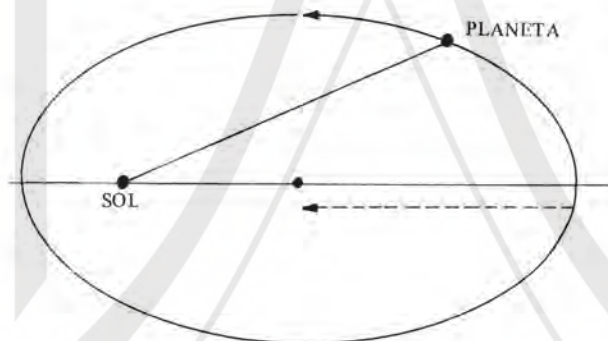


Figura 1.18

A partir de estas leyes, Newton dedujo la siguiente *ley de gravitación universal*: dos cuerpos de masas m y M respectivamente se atraen según una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos y proporcional al producto de las masas. En fórmula:

$$F = -\frac{\gamma m M}{r^2} \vec{i}$$

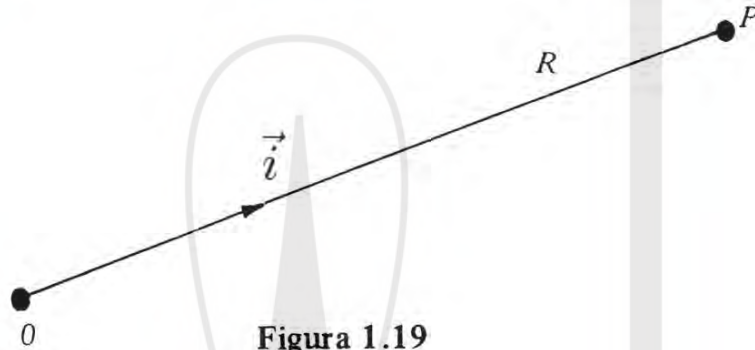


Figura 1.19

donde \vec{i} es un vector de longitud uno soportado por el segmento OP . La constante γ no depende de los cuerpos y si las masas están dadas en kilogramos, las distancias en metros y las fuerzas en Newton, vale: 6.67×10^{-11} .

Notemos que se está suponiendo que los cuerpos no tienen volumen, es decir que son puntos en el espacio con masa. Esto a primera vista no es el caso de los planetas; recordamos aquí las dudas del propio Newton al respecto como lo expusimos al principio del fascículo I de Cálculo. Ahora bien, veremos en la próxima sección que la atracción gravitacional ejercida por una esfera sólida y homogénea por capas actúa como si la masa estuviera concentrada en el centro; por lo tanto el modelo de Kepler y Newton es aplicable rigurosamente al sistema planetario.

En esta sección veremos que de hecho *las leyes de Kepler son equivalentes a la ley de gravitación universal*. Para simplificar un poco supondremos que el movimiento está en un plano, que la masa de Sol es mucho mayor que la masa del planeta, y el Sol está fijo en el origen. En un tratamiento más completo se puede probar la primera suposición y ver que la segunda agrega solamente el movimiento del Sol al movimiento del sistema. Suponemos además que no hay atracción interplanetaria. Podemos entonces localizar al planeta especificando sus coordenadas o el ángulo θ y la distancia al Sol r .

Vemos que:

$$x = r \cos \theta$$

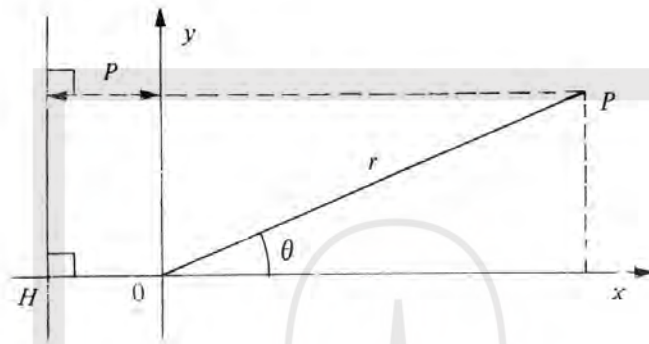


Figura 1.20

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Recordemos además que una cónica se define como el conjunto de puntos tales que su distancia r a un foco es proporcional a su distancia a una recta fija, la directriz.

En la Figura 1.20: $r = e(P + r \cos \theta)$ donde P es la distancia del foco a la directriz, y e es una constante, la excentricidad, menor que 1 si es una elipse, igual a 1 si es una parábola y mayor que 1 en el caso de una hipérbola.

Vemos entonces que:

$$r = \frac{eP}{1 - e \cos \theta}$$

(Recomendamos verificar esto en los fascículos de geometría, o, para distintas direcciones θ calcular r y graficar la curva). Ahora bien, para explicar la segunda ley de Kepler, notemos que si P se desplaza un poco (figura 1.21), de un ángulo $d\theta$ en el tiempo dt , el área del sector angular OPQ será: $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ como ya lo hemos visto en los fascículos III y IV. (El área del círculo, para $d\theta = 2\pi$ es πr^2).

Entonces formalmente:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

Esta cantidad $\frac{dS}{dt}$ es la velocidad a la cual va variando el área barrida por el vector OP , y se llama *velocidad areal*. La segunda ley de Kepler dice que $\frac{dS}{dt} = k$, una constante. Ahora bien si el punto P se mueve, sus coordenadas (x, y) serán funciones del tiempo, y también r y θ .

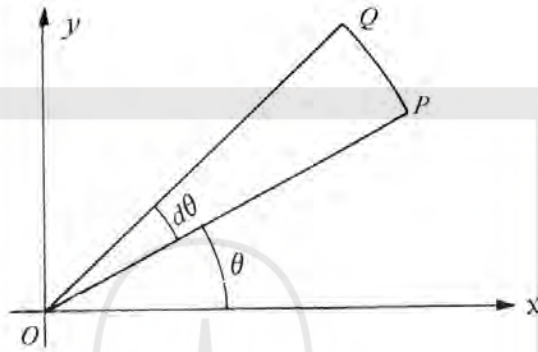


Figura 1.21

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \cos \theta(t) \\y(t) &= r(t) \operatorname{sen} \theta(t)\end{aligned}$$

Derivando y usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}x'(t) &= r' \cos \theta - r\theta' \operatorname{sen} \theta \\y'(t) &= r' \operatorname{sen} \theta + r\theta' \cos \theta \\x''(t) &= (r'' - r\theta'^2) \cos \theta - (2r'\theta' + r\theta'') \operatorname{sen} \theta \\y''(t) &= (r'' - r\theta'^2) \operatorname{sen} \theta + (2r'\theta' + r\theta'') \cos \theta.\end{aligned}$$

Como:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \theta' \right) = \frac{r}{2} (2r'\theta' + r\theta'')$$

y

$$\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \theta, \quad \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta$$

vemos que podemos escribir el vector aceleración $\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ como:

$$\vec{\Gamma} = (r'' - r\theta'^2) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} + \frac{2}{r} \frac{d^2 S}{dt^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_t$$

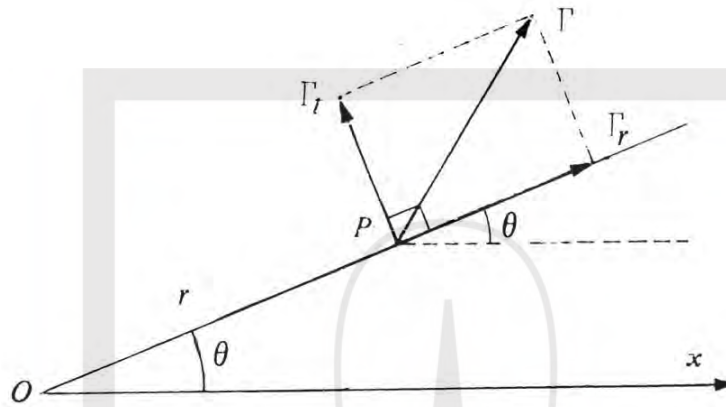


Figura 1.22

donde $\vec{\Gamma}_r$ es un vector colineal con OP de longitud $|r'' - r\theta'^2|$ y $\vec{\Gamma}_t$ es un vector perpendicular a OP , de longitud $\left| \frac{2}{r} \frac{d^2 S}{dt^2} \right|$ (figura 1.22).

Entonces la segunda ley de Kepler nos dice que:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = 0$$

ya que $\frac{dS}{dt}$ es constante.

Esto es equivalente a decir: $\vec{\Gamma}_t = 0$ o a decir que la *aceleración del punto P, es colineal con el vector OP: es radial*.

Ejercicio:

Compruebe que $r^2\theta' = xy' - x'y$ y derivando esta expresión vea que: $\frac{x}{x''} = \frac{y}{y''}$, es decir, la aceleración es colineal con OP .

Teniendo una *aceleración radial*, veamos ahora cómo la primera ley de Kepler es equivalente a la ley de gravitación universal, con una constante que podría depender del planeta (su universalidad viene de la tercera ley).

a) Si la fuerza es radial y vale $-\gamma \frac{mM}{r^2}$, la ley de Newton nos dice que:

$$m\Gamma_r = m(r'' - r\theta'^2) = -\gamma \frac{mM}{r^2}$$

y como $\theta'^2 = \left(\frac{2k}{r^2} \right)^2$, de la segunda ley de Kepler:

$$r'' - \frac{4k^2}{r^3} + \frac{\gamma M}{r^2} = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden para $r(t)$. Para encontrar la trayectoria, es decir, r como función de θ , tendremos que expresar $\frac{d^2r}{dt^2}$ en función de derivadas de r con respecto a θ .

Por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt}r(\theta(t)) = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \theta' = \frac{2k}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ \frac{dr}{dt} &= -2k \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-2k \frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right) \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -2k \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

por la regla de la cadena

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2k \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \theta' = \frac{-4k^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

La ecuación se escribe entonces:

$$\frac{-4k^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{4k^2}{r^3} + \frac{\gamma M}{r^2} = 0.$$

Simplificando

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{4k^2} = 0$$

o bien:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{4k^2} \right) + \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{4k^2} = 0$$

ya que $\frac{\gamma M}{4k^2}$ es una constante.

Ahora si ponemos $x = \frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{4k^2}$, esta ecuación,

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = 0$$

es la misma ecuación que encontramos en el ejemplo del oscilador armónico, cuya solución es:

$$x = A \cos(\theta - \phi)$$

donde A y ϕ son constantes de integración.

Entonces:

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma M}{4k} + A \cos(\theta - \phi)$$

$$r = \frac{4k^2/\gamma M}{1 + \frac{4k^2 A}{\gamma M} \cos(\theta - \phi)}.$$

Tomando $\phi = \pi$, lo cual se logra mediante una simple rotación de ejes, $P = \frac{1}{A}$ y $e = A \frac{4k^2}{\gamma M}$ vemos que:

$$r = \frac{Pe}{1 - e \cos \theta}$$

lo cual *representa la primera ley de Kepler*.

b) Por otra parte, si *suponemos esa ley*, vemos que:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{Pe} - \frac{1}{P} \cos \theta$$

y por lo tanto:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} - \frac{1}{Pe} = 0$$

Haciendo el cambio de variables de θ a t , llegaríamos a:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4k^2}{r^3} + \frac{4k^2}{Pe} = 0$$

es decir:

$$m\Gamma_r = \frac{-m}{r^2} \left(\frac{4k^2}{Pe} \right).$$

Poniendo $\gamma M = \frac{4k^2}{Pe}$, esta última fórmula nos daría la ley de gravitación universal, si el cociente $\frac{k^2}{Pe}$ es el mismo para todos los planetas: esto se deduce de la tercera ley de Kepler como lo veremos más adelante. (Notemos que las cantidades k y e de las que depende la trayectoria del planeta, $r = \frac{4k^2/\gamma M}{1 - e \cos \theta}$,

pueden determinarse a partir de la posición (r_0, θ_0) y de la velocidad $(r'_0, r_0\theta'_0)$ del planeta en un momento dado: dejamos el cálculo como ejercicio).

Consideremos finalmente la *tercera ley de Kepler* (figura 1.23):

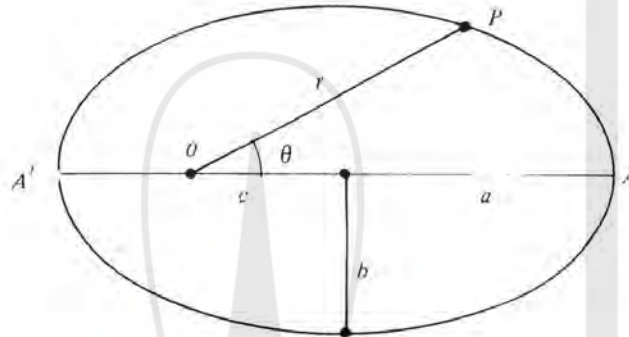


Figura 1.23

El área total del elipse es πab , como se vio en el fascículo IV, y es barrida a una velocidad constante $\frac{dS}{dt} = k$ en un tiempo T , es decir: $\text{Area} = \pi ab = kT$. Ahora de la fórmula:

$$r = \frac{Pe}{1 - e \cos \theta}$$

vemos que

$$OA = \frac{Pe}{1 - e}, \quad OA' = \frac{Pe}{1 + e}$$

y

$$A'A = 2a = Pe \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right) = \frac{2Pe}{1 - e^2}$$

$$a = \frac{Pe}{1 - e^2}.$$

Además $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = a^2(1 - e^2)$, como se puede comprobar en el fascículo de geometría analítica. Entonces

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{k^2} = \frac{\pi^2}{k^2} a^4 (1 - e^2) = \frac{\pi^2}{k^2} a^3 Pe$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{Pe}{4k^2} a^3.$$

Ahora cuando partimos de la ley de gravitación universal, vimos que $Pe = \frac{4k^2}{\gamma M}$, por lo tanto:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

probando la tercera ley de Kepler ya que $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$ sólo depende de la masa del Sol y no de los planetas.

Recíprocamente, si partimos de la tercera ley de Kepler, vemos que $4\pi^2 \frac{Pe}{4k^2}$ no depende de los planetas, es decir, el cociente $\frac{k^2}{Pe}$ es el mismo para todos los planetas, obteniendo así la ley de gravitación universal.

1.6. GRAVEDAD, LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL Y MÉTODO DE CAPAS

Como lo hemos visto en la sección anterior, dos cuerpos se atraen según la ley de gravitación universal. Por otra parte, sabemos que la fuerza que nos mantiene sobre la Tierra y la que hace caer una piedra al suelo es la fuerza de la gravedad debida a la atracción de la piedra por la Tierra. Es evidente que se trata del mismo fenómeno, en el primer caso con dos masas puntuales, en el segundo con dos cuerpos que tienen un volumen, aclarando así las dudas acerca del modelo planetario.

El propósito de esta sección es el explicar esa idea intuitiva, pero para ello necesitamos un *nuevo método de integración, el método de capas* y, para simplificar las cosas, veremos primero cómo calcular volúmenes de sólidos de revolución por este método.

1) Método de capas

Supongamos que tenemos la gráfica de una función $f(x)$, para x entre a y b como la figura 1.24 y que giramos esa figura alrededor del eje y , obteniendo un sólido de revolución generado por el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x .

Ya conocemos varios métodos para calcular este volumen, sea con el método de discos discutido en el fascículo IV, sea con el método de secciones transversales del fascículo V. En la figura 1.25 la sección transversal es un anillo de radio interior a y de radio exterior b , si y es menor que $f(b)$, y x si la sección se hace a la altura $f(x)$.

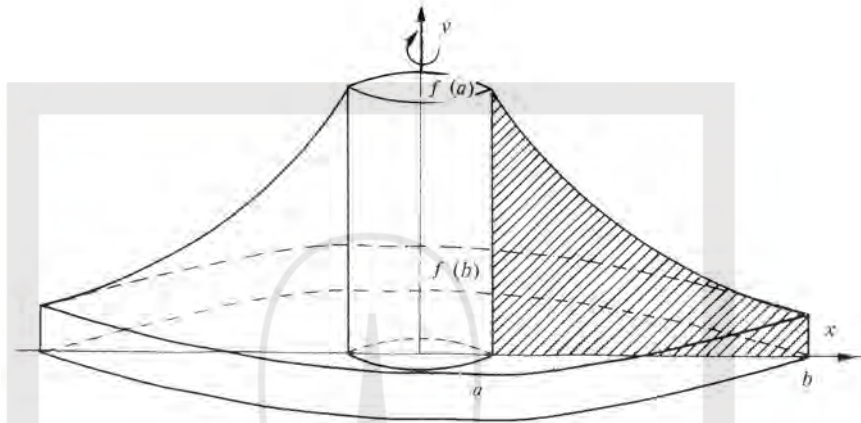


Figura 1.24

El área de esa sección será: $\pi b^2 - \pi a^2$ para y menor que $f(b)$ y $\pi(x^2 - a^2)$ para y entre $f(b)$ y $f(a)$.

Entonces el volumen será:

$$V = \int_0^{f(a)} S(y) dy$$

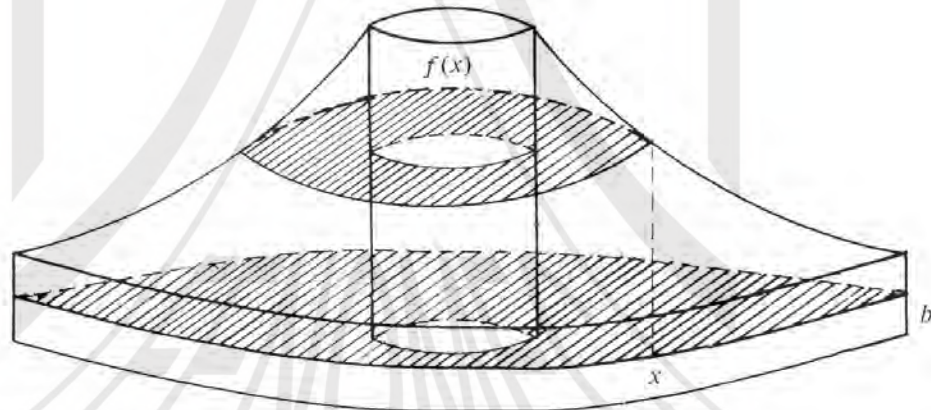


Figura 1.25

$$V = \int_0^{f(b)} \pi(b^2 - a^2) dy + \int_{f(b)}^{f(a)} \pi(x^2 - a^2) dy$$

Si en la segunda integral hacemos el cambio de variable:

$$y = f(x)$$

$$\begin{aligned} \int_{f(b)}^{f(a)} \pi(x^2 - a^2) dy &= \int_b^a \pi(x^2 - a^2) f'(x) dx \\ &= \pi(x^2 - a^2) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b 2\pi x f(x) dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$V = \pi(b^2 - a^2) f(b) - \pi(b^2 - a^2) f(b) + \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Ahora bien, se puede encontrar esta fórmula de la manera siguiente: Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ a una distancia Δx uno de otro, podemos aproximar el volumen por cilindros de alto $f(x_k)$ y radio x_k (figura 1.26). El volumen de cada cilindro es $\pi x_k^2 f(x_k)$, entonces el volumen del anillo cilíndrico comprendido entre dos cilindros consecutivos será un valor entre los volúmenes de dos anillos cilíndricos (figura 1.27), uno con altura igual al máximo de $f(x)$ en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ el otro con altura igual al mínimo de $f(x)$ en ese intervalo.

Es decir: $\pi(x_{k+1}^2 - x_k^2) \text{mín } f(x) \leq \Delta V \leq \pi(x_{k+1}^2 - x_k^2) \text{máx } f(x)$.

Como $x_{k+1}^2 - x_k^2 = (x_k + x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = (x_k + x_{k+1})\Delta x$. Al dividir esa relación por Δx y tomar el límite cuando Δx tiende a 0 se obtiene:

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi x f(x)$$

$\frac{dV}{dx}$ es el área del cilindro de altura $f(x)$ y radio x .

Por lo tanto:

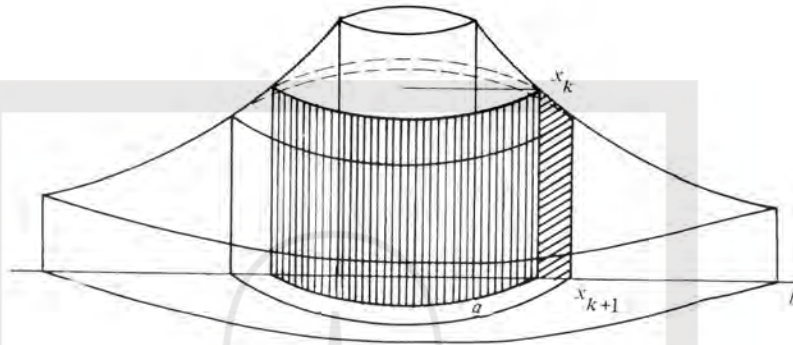


Figura 1.26

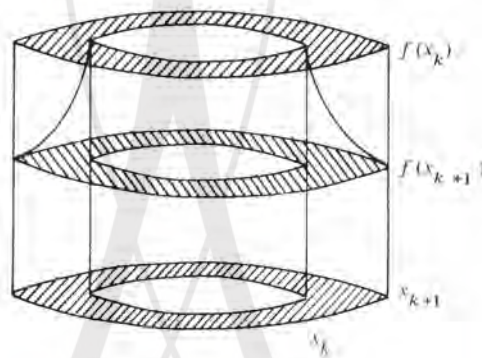


Figura 1.27

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Ejemplo 1.1:

Si consideramos un toro, o una dona, obtenido al girar el círculo $(x - b)^2 + a^2$ alrededor del eje y , su volumen será dos veces el volumen generado por la parte superior, $y > 0$:

$$V = 2 \int_{b-a}^{b+a} 2\pi x f(x) dx \quad \text{con} \quad f(x) = y = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}.$$

Si ponemos $z = x - b$

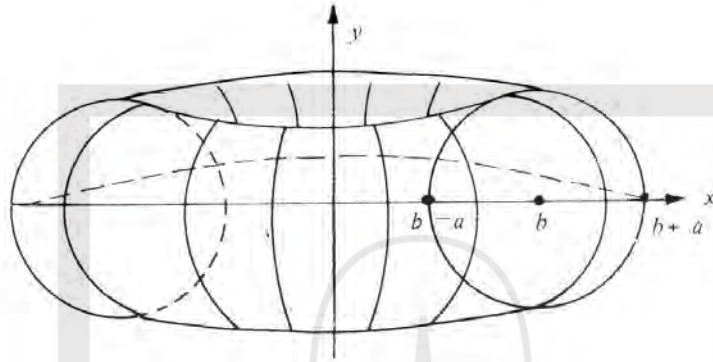


Figura 1.28

$$V = 4\pi \int_{-a}^a (z + b) \sqrt{a^2 - z^2} dz$$

$$V = 4\pi \left(-\frac{1}{3}(a^2 - z^2)^{3/2} \Big|_{-a}^a + \frac{b}{2} \text{Area del círculo de radio } a \right)$$

$$V = 2\pi^2 a^2 b$$

Ejercicios

- 1.12 Encuentre el volumen de la esfera, con $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ con este método.
- 1.13 Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la gráfica de $y = \sqrt{1 - x}$ alrededor del eje $x = -1$. Se recomienda el cambio de variable $\sqrt{1 - x} = z$, teniendo en cuenta que el radio de cada cilindro ya no es x sino $x + 1$.

Ejemplo 1.2

Calcule el volumen generado al girar el sector de la figura 1.29.

El volumen es la suma del volumen V_1 obtenido al girar el triángulo OBH y el volumen V_2 obtenido al girar la figura HAB . Para el primer volumen x varía de 0 a la abscisa de H , $R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, con $f(x)$ siendo la ecuación de la recta OB : $y = f(x) = x \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$V_1 = 2\pi \int_0^{R \cos \theta} x \cot \theta dx$$

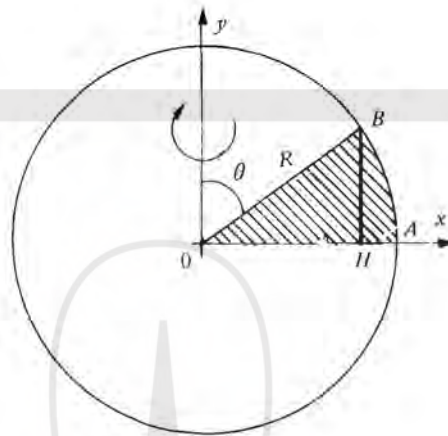


Figura 1.29

$$V_1 = 2\pi \cot \theta \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{3} R^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$

Para el segundo volumen V_2 , x varía de $R \operatorname{sen} \theta$ a R y $f(x)$ vale $\sqrt{R^2 - x^2}$

$$V_2 = 2\pi \int_{R \operatorname{sen} \theta}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_{R \operatorname{sen} \theta}^R$$

$$V_2 = \frac{2\pi}{3} R^3 \cos^3 \theta$$

Por lo tanto $V = V_1 + V_2 = \frac{2\pi}{3} R^3 \cos \theta$.

II) Gravitación universal y gravedad

Estudiaremos ahora la atracción de un cuerpo por la Tierra: Supondremos que la Tierra es perfectamente esférica y homogénea, es decir, que si tomamos un pedazo de Tierra de volumen V su masa será ϕV donde ϕ es el mismo número para cualquier volumen V . Según la ley de gravitación universal ese pedazo atrae el cuerpo de masa m con una fuerza:

$$\vec{F}_V = \frac{-\gamma m \phi V}{r^2} \vec{i}_V$$

donde r es la distancia del cuerpo al pedazo y \vec{i}_V un vector de longitud uno soportado por la recta que va del pedazo al cuerpo. Entonces lógicamente la fuerza total ejercida por la Tierra sobre el cuerpo será la suma de todas las fuerzas ejercidas por cada pedazo. Para esto dividimos la esfera en capas esféricas de espesor $\Delta\rho$ y de radio ρ donde ρ varía de 0 a R , el radio de la Tierra.

Calculamos primero la fuerza debida a una *capa* sobre el cuerpo que está a una distancia r del centro de la Tierra (figura 1.30).

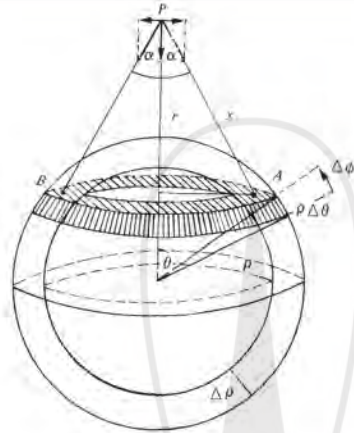


Figura 1.30

Para cada ángulo θ entre 0 y π consideramos la corona del dibujo comprendida entre las dos esferas y correspondiendo a un ángulo $\Delta\theta$. Podemos ver que todos los puntos de esa corona están prácticamente a la misma distancia x del punto P si $\Delta\rho$ y $\Delta\theta$ son muy pequeños. Cada punto A de esa corona ejercerá una fuerza:

$$\vec{F}_A = \frac{-\gamma m \phi}{x^2} \vec{i}_A,$$

con componente radial: $\frac{-\gamma m \phi}{x^2} \cos \alpha$ y componente horizontal, como puede verse en el dibujo, $\frac{-\gamma m \phi}{x^2} \sin \alpha$. Pero, sobre la corona, para cada punto A hay un punto opuesto B ejerciendo una fuerza cuya componente horizontal es igual pero opuesta a la componente horizontal correspondiente al punto A . La suma de esas dos componentes es cero, es decir, la fuerza que ejerce la corona sobre el punto P es radial *y* vale:

$$\Delta F = -\frac{\gamma m \phi}{x^2} \cos \alpha \Delta V$$

donde $\phi \Delta V$ es la masa de la corona y ΔV su volumen.

Para calcular ΔV haremos las siguientes consideraciones: la longitud del arco de la corona es $\rho \Delta\theta$ y su radio exterior es aproximadamente $\rho \sin \theta$; por lo tanto la superficie exterior de la corona será: $(\rho \Delta\theta)(2\pi \rho \sin \theta)$ y con un espesor de $\Delta\rho$ tendremos

$$\Delta V \simeq 2\pi\rho^2 \operatorname{sen} \theta \Delta\theta \Delta\rho.$$

De hecho la corona se obtiene al girar en la figura 1.31 la superficie $ABCD$ alrededor del eje y :

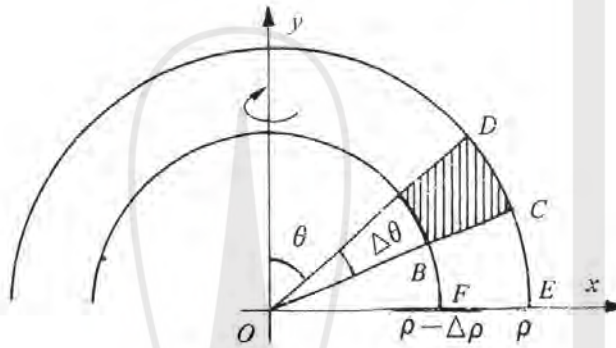


Figura 1.31

El volumen obtenido es claramente el obtenido al hacer girar el sector ODE menos el sector OCE , menos el sector OAF , más el sector OBF (figura 1.32).

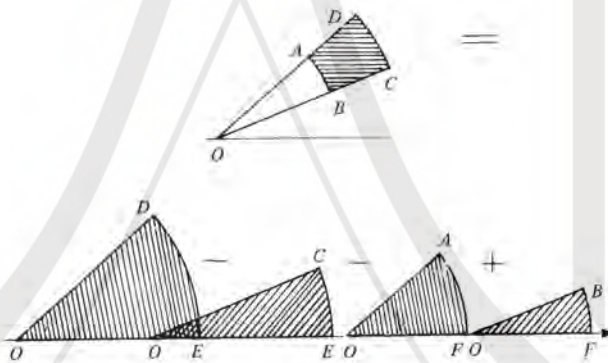


Figura 1.32

Ahora bien, cada uno de los volúmenes generados es de la forma que ya hemos estudiado en el ejemplo 1.2:

$$\Delta V = \frac{2\pi}{3}\rho^3 \cos \theta - \frac{2\pi}{3}(\rho - \Delta\rho)^3 \cos \theta - \frac{2\pi}{3}\rho^3 \cos(\theta + \Delta\theta) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{3}(\rho - \Delta\rho)^3 \cos(\theta + \Delta\theta) \\ \Delta V &= \frac{2\pi}{3}(\rho^3 - (\rho - \Delta\rho)^3)(\cos\theta - \cos(\theta + \Delta\theta)) \\ \Delta V &= 2\pi\Delta\rho\left(\rho^2 - \rho\Delta\rho + \frac{(\Delta\rho)^2}{3}\right) 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Al dividir ΔV por $\Delta\theta\Delta\rho$, si hacemos tender ambos incrementos a cero vemos que el límite es $2\pi\rho^2 \operatorname{sen}\theta$.

Entonces

$$\Delta F = -\gamma m\phi \frac{\cos\alpha}{x^2} 2\pi\rho^2 \operatorname{sen}\theta \Delta\theta\Delta\rho$$

donde debemos hacer variar θ de 0 a π y ρ de 0 a R . Por lo tanto, la atracción de la capa de espesor $\Delta\rho$ será:

$$F_{\Delta\rho} = -2\pi\rho^2\gamma m\phi \int_0^\pi \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\theta d\theta}{x^2} \Delta\rho$$

y la atracción de la Tierra:

$$F = \int_0^R \frac{F_{\Delta\rho}}{\Delta\rho} d\rho$$

Ahora bien si usamos las relaciones:

$$\begin{aligned} x \cos\alpha + \rho \cos\theta &= r \\ x^2 &= \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\theta}{x^2} &= \frac{(r - \rho \cos\theta)\operatorname{sen}\theta}{x^3} = \frac{(r - \rho \cos\theta)\operatorname{sen}\theta}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{3/2}} \\ &= -\frac{(r - \rho \cos\theta)}{\rho r} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2}} \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}\theta}{x^2} d\theta \\ I &= \frac{-(r - \rho \cos\theta)}{\rho r(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2}} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta}{r(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2}} d\theta \\ I &= \frac{-(r - \rho \cos\theta)}{\rho r(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2}} \Big|_0^\pi + \frac{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\theta)^{1/2}}{\rho r^2} \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

$$I = \frac{\rho - r \cos \theta}{r^2(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \theta)^{1/2}} \Big|_0^\pi$$

$$I = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\rho + r}{\rho + r} - \frac{\rho - r}{|\rho - r|} \right) = \frac{1}{r^2} (1 + \text{signo}(r - \rho))$$

$I = \frac{2}{r^2}$ si $r > \rho$, es decir, si el cuerpo está afuera de la capa.

$I = 0$ si $\rho > r$, es decir, si el cuerpo está adentro de la capa.

Entonces $F_{\Delta\rho} = \frac{-\gamma 4\pi\rho^2\phi\Delta\rho m}{r^2}$ en el primer caso, 0 en el segundo.

Notemos que $4\pi\rho^2\Delta\rho$ es el volumen de la capa y $4\pi\rho^2\Delta\rho\phi$ en su masa: *la atracción debida a la capa es la misma que si pusieramos en el centro de la esfera una masa puntual de misma magnitud que la de la Tierra, si el punto P está afuera de la capa, y la atracción es cero si P está dentro.*

La atracción de la Tierra es entonces:

$$F = \int_0^R \frac{4\pi\gamma\phi m}{r^2} \rho^2 d\rho = -\frac{\gamma\frac{4}{3}\pi R^3\phi m}{r^2}$$

$$F = -\frac{\gamma M m}{r^2} \quad \text{si el cuerpo está afuera,}$$

donde $M = \frac{4}{3}\pi R^3\phi$ es la masa de la Tierra, y

$$F = \int_0^r -\frac{4\pi\gamma\phi m\rho^2 d\rho}{r^2} = -\gamma \frac{4}{3} \pi r \phi m$$

para un cuerpo dentro de la Tierra ya que las capas externas no lo atraen. En ambos casos todo pasa como si el material estuviese concentrado en el centro de la Tierra.

Entonces, para *un cuerpo sobre la superficie de la Tierra*:

$$F = -\frac{\gamma M m}{R^2}$$

Como

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11}, \quad M = 6 \times 10^{24} \text{ kg. } R = 6400 \text{ km} = 6,4 \times 10^6 \text{ m.}$$

resulta que $F = -9,8 \text{ m}$, lo cual corresponde al *peso del cuerpo*.

Vemos así que la fuerza de gravedad es una consecuencia de la ley de gravitación universal.

Notemos, finalmente, que podemos obtener el mismo resultado si en lugar de tener una densidad ϕ constante, ésta es constante en capas; es decir, $\phi = \phi_1$ para

$0 < \rho < R_1, \phi = \phi_2$ para $R_1 < \rho < R_2, \dots, \phi = \phi_n$ para $R_{n-1} < \rho < R_n = R$.
Entonces la integral para F debe ser dividida en n integrales con:

$$F = -\frac{4}{3}\pi\gamma\frac{m}{r^2}(R_1^3\phi_1 + (R_2^3 - R_1^3)\phi_2 + \dots + (R^3 - R_{n-1}^3)\phi_n).$$

Pero en todo caso $F = -\frac{\gamma m M}{r^2}$ donde M es la masa de la Tierra.



<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx



<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Capítulo 2

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Concluiremos este fascículo con ejemplos de ecuaciones diferenciales distintas de la ley de Newton y veremos algunos métodos de integración.

2.1. LEYES DE POBLACIONES DE MALTHUS Y DE VERHULST

En 1798, el economista y matemático **Thomas Malthus** (1766-1834), defensor de la ley de la oferta y la demanda, propuso un modelo de crecimiento de poblaciones que tuvo repercusiones tan fuertes en la vida económica de las naciones europeas que generó una corriente filosófica conocida como el malthusianismo, la cual revivió recientemente en los países industrializados a raíz de los modelos económicos del Club de Roma y se conoce como la política de crecimiento cero.

Malthus consideró una población, no necesariamente humana, con $N(t)$ individuos al tiempo t . Claramente, el incremento de población entre los momentos t y $t + h$ corresponde a la diferencia entre el número de individuos que nacieron y el número de los que murieron en ese intervalo, suponiendo que no hay migraciones. Además es razonable suponer, en primera aproximación, que cada uno de esos números es proporcional a $N(t)$ y a h . Por lo tanto, si α y β son los coeficientes de proporcionalidad, i.e. las tasas de natalidad y de mortalidad respectivamente, tendremos: $N(t + h) - N(t) = \alpha N(t)h - \beta N(t)h$.

Aunque $N(t)$ varía por números enteros, una variación de unos cuantos individuos sobre una población total grande se notará como una variación casi continua y por lo tanto, supondremos que $N(t)$ es una función diferenciable.

La velocidad del crecimiento de la población queda dada por:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$$

donde $\alpha - \beta$ es la tasa de crecimiento. Entonces

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \alpha - \beta = \frac{d}{dt} \ln N.$$

Si la tasa de crecimiento es constante: ¹

$$\ln N - \ln N(t_0) = (\alpha - \beta)(t - t_0)$$

Por lo tanto

$$N(t) = N(t_0)e^{(\alpha - \beta)(t - t_0)}$$

Por ejemplo, en 1961, la población humana era de 3×10^9 con $\alpha - \beta = 0,02$ por lo tanto:

$$N(t) = 3 \times 10^9 e^{0,02(t - 1961)}$$

Ahora bien, los censos de población mundial indican que la población se duplicó cada 35 años, es decir:

$$N(t) = 2N(t_0) \quad \text{si} \quad t = t_0 + 35.$$

Si usamos nuestra fórmula, vemos que:

$$N(t_0 + T) = N(t_0)e^{(\alpha - \beta)T} = 2N(t_0)$$

si $e^{(\alpha - \beta)T} = 2$ o sea:

$$T = \frac{\ln 2}{\alpha - \beta} = \frac{0,6931}{\alpha - \beta}$$

Con $\alpha - \beta = 0,02$., el *periodo calculado* será:

$$T = 34,6 \quad \text{años.}$$

Para México, con $\alpha - \beta = 0.034 = 3.4\%$, la población se duplica cada veinte años.

¹Este caso particular fue presentado en el fascículo II de Cálculo

Ahora, *hacia el futuro*: Según esta fórmula, en el año 2510, la población mundial sería de 200×10^{12} , ¡lo cual dejaría menos de un metro cuadrado, de tierra o agua, por persona!

Ante estas conclusiones es evidente que debemos cuestionar el modelo. Las hipótesis de diferenciabilidad y de proporcionalidad pueden justificarse sin demasiados problemas, pero la constancia de la tasa de crecimiento es mucho más dudosa. Si hacemos experimentos con poblaciones de crecimiento rápido como bacterias o ratas, excluyendo factores externos como epidemias u otras catástrofes naturales, podemos asegurarnos de la independencia de la tasa de crecimiento con respecto al tiempo, para tiempos cortos y al repetir varias veces el experimento, pero observaremos que, a partir de un cierto número de individuos, hay una competencia interna para la comida, el espacio y los recursos en general que se traduce en autolimitación, guerras, enfermedades debidas a la promiscuidad y por lo tanto en una reducción de la tasa de crecimiento: *la función $\alpha - \beta$ depende de N* .

Tomando un desarrollo de Taylor:

$$(\alpha - \beta)(N) = a - bN + \dots$$

donde a sería la tasa de crecimiento para poblaciones muy pequeñas y el término $-bN$ un factor correctivo de limitación de crecimiento. Para N grande, aún si b es muy pequeño, $a - bN$ puede llegar a ser negativo.

Este fue el modelo presentado en 1837 por el matemático holandés **Verhulst**:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) = aN - bN^2; N(0) = N_0$$

La razón para cortar la serie en bN^2 es que estadísticamente el número de encuentros entre N individuos es proporcional a N^2 , según la *ley de acción de masas en Química*, y que una proporción de esos encuentros resulta en muerte o en disminución de la natalidad. De hecho si tenemos N individuos en un local, la probabilidad de que un individuo se encuentre en cierto lugar A es proporcional a N , ya que a mayor densidad mayor probabilidad de tener a un individuo en ese lugar. Esa probabilidad será βN donde β es esencialmente I/V , donde V es el volumen del local.

La probabilidad de que dos individuos se encuentren en A es el producto de las probabilidades $\beta^2 N^2$, ya que los individuos son estadísticamente independientes, dando el resultado deseado.

Podemos escribir la ecuación en la forma

$$\frac{1}{N(a-bN)} \frac{dN}{dt} = 1 \quad ; \quad N(0) = N_0$$

y, para resolver el problema, tenemos que integrar un cociente de polinomios en N donde el denominador tiene dos raíces, 0 y a/b , caso que no cubrimos en el fascículo V, sección B del capítulo 3. Como siempre tratamos de encontrar funciones cuya derivada se parezca al denominador. Recordemos que:

$$\frac{d}{dt} \text{Ln } N(t) = \frac{N'(t)}{N} \text{ y } \frac{d}{dt} \text{Ln } (a-bN) = -\frac{bN'}{a-bN}.$$

Estas expresiones son precisamente los factores que aparecen en el denominador.

La idea es escribir $\frac{N'}{N(a-bN)}$ como una expresión donde los factores $\frac{N'}{N}$ y $\frac{N'}{a-bN}$ aparezcan separados.

Si escribimos $\frac{1}{N(a-bN)} = \frac{\alpha}{N} + \frac{\beta}{a-bN}$ tenemos:

$$\frac{1}{N(a-bN)} = \frac{\alpha a + N(\beta - \alpha b)}{N(a-bN)}.$$

Igualando los numeradores, necesitamos

$$\begin{aligned} \alpha a &= 1 & \alpha &= \frac{1}{a} \\ \beta - \alpha b &= 0 & \beta &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{N'}{N(a-bN)} = \frac{1}{a} \frac{N'}{N} + \frac{b}{a} \frac{N'}{a-bN}$$

Podemos ahora integrar la ecuación:

$$\int_0^t \frac{N'}{N(a-bN)} dt = \int_0^t dt$$

obteniendo

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{a} \int_0^t \frac{N'}{N} dt + \frac{1}{a} \int_0^t \frac{bN' dt}{a-bN}; \\ t &= \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{N(t)}{N(0)} - \frac{1}{a} \text{Ln} \left(\frac{a-bN(t)}{a-bN(0)} \right). \end{aligned}$$

Es decir:

$$\text{Ln} \left(\frac{N(t)}{N_0} \frac{a-bN_0}{a-bN(t)} \right) = at$$

o bien:

$$\frac{N(t)}{a - bN(t)} = \frac{N_0}{a - bN_0} e^{at}$$

Despejando $N(t)$, tenemos:

$$N(t) = \frac{\frac{aN_0}{a-bN_0} e^{at}}{1 + \frac{bN_0}{a-bN_0} e^{at}}$$

o bien

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}$$

Como e^{-at} es menor que 1 para t positivo y decreciente, tendiente a 0 cuando t tiende a ∞ :

$$N(t) \longrightarrow \frac{a}{b} \text{ cuando } t \longrightarrow \infty$$

Si $N(0) < \frac{a}{b}$ entonces $N(t) < \frac{a}{b}$ con derivada $N' = (a - bN)N$ positiva, mientras que si $N_0 > \frac{a}{b}$, entonces $N(t) > \frac{a}{b}$ con derivada negativa.

Además $N''(t) = \frac{d}{dt}(N(a - bN)) = N'(a - bN) - bNN' = (a - 2bN)N(a - bN)$.

Si $N_0 > \frac{a}{2b}$ la función es convexa, mientras que si $N_0 < \frac{a}{2b}$ hay un punto de inflexión en $\frac{a}{2b}$ (figura 2.1).

Vemos también que para $b = 0$, $N(t) = N_0 e^{at}$, la ley de Malthus y $\frac{N(t) - N_0 e^{at}}{N(t)} = \frac{bN_0}{a}(1 - e^{at})$.

Como $e^{at} \sim 1 + at$: $\frac{N(t) - N_0 e^{at}}{N(t)} \sim -bN_0 t$ para t pequeño: los dos modelos dan resultados cercanos, dando una explicación del crecimiento explosivo actual de la población humana. Los ecólogos estiman que el valor de a es 0.029 como N valía 3×10^9 en 1961 cuando la tasa de crecimiento $N'/N = a - bN$ era de 0.02, se deduce que b vale 2.9×10^{-12} y el valor límite a/b sería de 10×10^9 individuos. En la actualidad, como no hemos llegado todavía al punto de inflexión, seguimos con un crecimiento de forma exponencial.

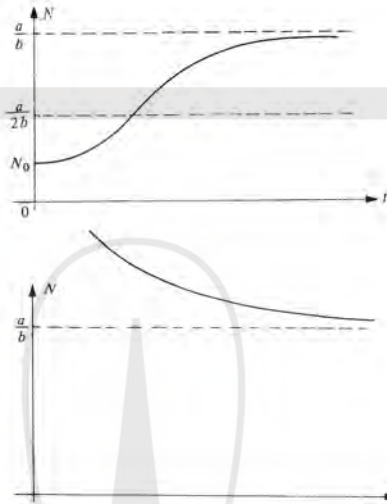


Figura 2.1 Curva logística o en s

EJERCICIO 2.1.:

En México, cuando la población era de 50 millones la tasa de crecimiento $\frac{N'}{N} = a - bN$ era de 0.035 y cuando fue de 70 millones la tasa bajó a 0.032. Calcule los coeficientes a y b y el valor límite de la población.

(Respuesta: $b = 1.5 \times 10^{-10}$, $a = 0.0425$, $\frac{a}{b} = 283$ millones).

Por ejemplo, en 1845, Verhulst publicó sus resultados para la población de los E.U.A., con $a = 0.3134$, $b = 1.5887 \times 10^{-10}$, $N_0 = N(1790) = 3.9 \times 10^6$ y calculó los resultados hasta 1930:

| Año | N Calculado en millones | N observado en millones | 1860 | 30.4 | 31.4 |
|------|------------------------------|------------------------------|------|-------|-------|
| 1790 | 3.9 | 3.9 | 1870 | 39.4 | 38.6 |
| 1800 | 5.2 | 5.3 | 1880 | 50.2 | 50.2 |
| 1810 | 7.2 | 7.2 | 1890 | 62.8 | 62.9 |
| 1820 | 9.8 | 9.6 | 1900 | 76.9 | 76 |
| 1830 | 13.1 | 12.9 | 1910 | 92 | 92 |
| 1840 | 17.5 | 17.1 | 1920 | 109.4 | 106.5 |
| 1850 | 23.2 | 23.2 | 1930 | 123.9 | 123.2 |

Las coincidencias son asombrosas a pesar de guerras y migraciones, pero $\frac{a}{b} = 197$ millones y actualmente la población de ese país está cerca de 230 millones. Del

mismo modo Verhulst predijo una población límite de 6.6 millones para Bélgica (actualmente más de 12) y de 40 millones para Francia (actualmente cerca de 60). Estos errores, además de revelar las limitaciones de tales modelos, podrían explicarse por el hecho de que los coeficientes a y b dependen en realidad del tiempo: Revolución industrial, mejor aprovechamiento de los recursos, mejores políticas sanitarias, planeación familiar los van cambiando periódicamente. Actualmente se trabaja con coeficientes de mortalidad que dependen de la edad, del sexo, del medio ambiente, del tiempo y que pueden ser probabilísticos, pero las matemáticas son más complicadas.

2.2. REACTORES NUCLEARES

En un reactor nuclear se bombardean átomos de uranio con partículas, en general neutrones. Al chocar un neutrón con un átomo, éste se parte en varios pedazos y se emiten dos o tres neutrones. Estos a su vez chocan con otro átomo o se pierden. Si todos se pierden, se para la reacción atómica. Si todos chocan tenemos una cadena cada vez mayor de choques con estallido final.

Si tenemos una bola de uranio de radio r , los neutrones que se pierden deben recorrer en promedio la distancia r y por lo tanto la probabilidad de perderse, es decir, de salir de la bola, es β/r : *más radio, menos probabilidad de escape*.

Entonces si $N(t)$ es el número de neutrones al tiempo t :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \text{Número de neutrones creados entre } t \text{ y } t + \Delta t \\ - \text{Número de neutrones perdidos} \\ + \text{Número de neutrones que llegan por bombardeo}$$

Es claro que el número de neutrones creados es proporcional al número de choques y por lo tanto al número de neutrones presente, entonces:

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \alpha N \Delta t - \frac{\beta}{r} N \Delta t + q(t) \Delta t$$

donde $q(t)$ es la velocidad de bombardeo. Suponiendo, como en el ejemplo de poblaciones, que $N(t)$ es diferenciable:

$$\frac{dN}{dt} = \left(\alpha - \frac{\beta}{r} \right) N + q(t)$$

I) Si $q(t) \equiv 0$, $N(t) = N_0 e^{(\alpha - \frac{\beta}{r})t}$.

Si $\alpha > \frac{\beta}{r}$ hay explosión, mientras que si $\alpha < \frac{\beta}{r}$ la reacción desaparece. El punto crítico es para $\alpha = \frac{\beta}{r}$. Poniendo $\alpha \equiv \frac{\beta}{r_c}$, el punto crítico es para $r = r_c$ *radio crítico*; entonces si $r < r_c$ o si M , la masa de uranio, es menor que la masa

crítica $M_c = \frac{4}{3}\pi r_c^3 \rho$ (ρ densidad del uranio), no se desencadena la reacción, mientras que si $M > M_c$ hay explosión. En una bomba atómica se proyectan, con dinamita, dos semiesferas de uranio una contra la otra, de tal modo que cada media esfera no tenga la masa crítica, pero que la esfera total sí tenga esa masa; la radioactividad natural del uranio, desencadena la reacción.

II) En un reactor nuclear se mantiene $\alpha - \frac{\beta}{r} = \beta \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right)$ negativo, con barras de grafito por ejemplo (aunque el proceso es bastante complicado) y se mantiene un bombardeo externo $q(t)$. Entonces:

$$\frac{dN}{dt} = \beta \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right) N + q(t)$$

Multiplicando por $e^{-\beta(1/r_c - 1/r)t}$

$$\frac{d}{dt} (N(t) e^{-\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t}) = q(t) e^{-\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t}$$

$$N(t) e^{-\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t} - N_0 = \int_0^t q(s) e^{-\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})s} ds$$

Por lo tanto:

$$N(t) = N_0 e^{\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t} + \int_0^t q(s) e^{\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})(t-s)} ds$$

Por ejemplo si $q(t) \equiv q_0$, una constante:

$$N(t) = N_0 e^{\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t} + \frac{q_0}{\beta(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c})} (1 - e^{\beta(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r})t})$$

Si $r < r_c$, $N(t)$ tiende a $\frac{q_0}{\beta(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c})}$. Si r está muy cerca de r_c , tendremos muchos neutrones y por lo tanto mucha energía liberada. Esa energía, en general en forma de calor, es recuperada en circuitos de agua caliente y turbinas de vapor para generación de electricidad. El hecho de que r esté cercano a r_c implica que, al trabajar cerca de la masa crítica, los reactores deben ser controlados con mucho cuidado.

EJERCICIO 2.2. Grafique la función $N(t)$ en los casos: $N_0 - \frac{q_0}{\beta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right)} > 0$

y $N_0 - \frac{q_0}{\beta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_c} \right)} < 0$.

Notemos que hemos resuelto una ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

tomando la solución de esta ecuación cuando b no está presente:

$$y_0(x) = e^{\int_0^x a(t)dt}$$

(Es fácil ver que $\frac{dy_0}{dx} = e^{\int_0^x a(t)dt} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x a(t)dt \right)$ por la regla de la cadena y $\frac{dy_0}{dx} = y_0(x)a(x)$ por el teorema fundamental del cálculo).

Multiplicando la ecuación por $e^{-\int_0^x a(t)dt}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y(x)e^{-\int_0^x a(t)dt} \right) &= b(x)e^{-\int_0^x a(t)dt} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^x b(u)e^{-\int_0^u a(t)dt} du \right). \end{aligned}$$

Integrando: $y(x)e^{-\int_0^x a(t)dt} - y(0) = \int_0^x b(u)e^{-\int_0^u a(t)dt} du$
obtenemos

$$y(x) = y(0)e^{\int_0^x a(t)dt} + \int_0^x b(u)e^{\int_u^x a(t)dt} du$$

donde hemos multiplicado la ecuación por $e^{\int_0^x a(t)dt}$ y usando el hecho de que:

$$e^{\int_0^x a(t)dt} e^{-\int_0^u a(t)dt} = e^{\int_0^x a(t)dt - \int_0^u a(t)dt} = e^{\int_u^x a(t)dt}.$$

2.3. UN DISPOSITIVO MECÁNICO Y DOBLE INTEGRACIÓN POR PARTES

Un problema que se presenta con frecuencia en todo tipo de motores es el convertir un movimiento de rotación en un movimiento longitudinal o al revés.

Podemos tener por ejemplo un aro que se mueve, alrededor de una varilla, en un movimiento de vaivén tal como se ve en la figura 2.2.

Para disminuir el desgaste de las piezas móviles el sistema está engrasado, o en una caja con aceite. Esto implica fricciones que, en general para este tipo de

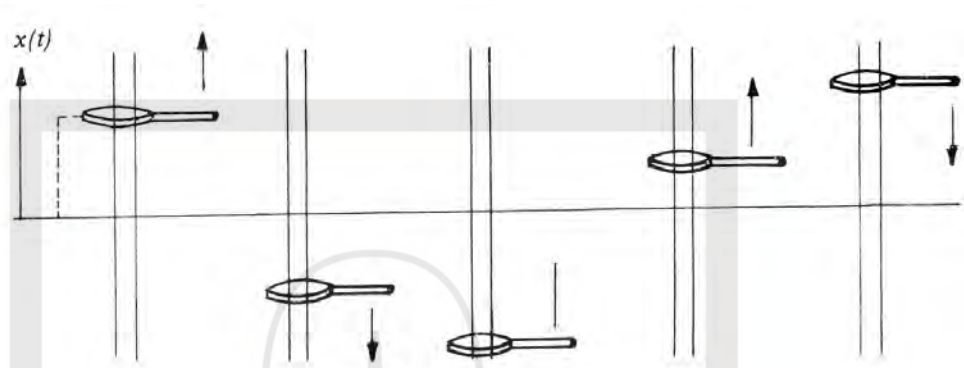


Figura 2.2

mecanismo, se oponen al movimiento y son proporcionales a la velocidad del aro:

$$\text{Fuerza de fricción} = -b \frac{dx}{dt}$$

(El signo menos significa, suponiendo que b es positivo, que la fuerza se opone al movimiento; b depende del material).

Si además imponemos una fuerza externa periódica dada por:

$$\text{Fuerza externa} = F_0 \text{ sen } \omega t$$

la ley de Newton nos da:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{Fuerza externa} + \text{Fuerza de fricción}$$

donde m es la masa del aro.

Entonces, tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -b \frac{dx}{dt} + F_0 \text{ sen } \omega t \\ x(0) &= x_0 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned}$$

donde x_0 y v_0 son las condiciones iniciales.

Podemos reducir esta ecuación, de segundo orden en $x(t)$, a una ecuación de primer orden en $v(t) = \frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v + \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t.$$

Multiplicando por $e^{\frac{b}{m}t}$ obtenemos, como en la sección anterior:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(e^{\frac{b}{m}t} v \right) &= \frac{F_0}{m} e^{\frac{b}{m}t} \operatorname{sen} \omega t \\ v(T) &= v_0 e^{-\frac{b}{m}T} + \frac{F_0}{m} e^{-\frac{b}{m}T} \int_0^T e^{\frac{b}{m}t} \operatorname{sen} \omega t dt\end{aligned}$$

Para obtener la velocidad, necesitamos calcular la integral. Esta es de un nuevo tipo y ahora ilustraremos cómo hacerlo.

Si, en la integral $I = \int_0^T e^{\frac{b}{m}t} \operatorname{sen} \omega t dt$, integramos por partes llamando $u = e^{\frac{b}{m}t}$, con $\frac{du}{dt} = \frac{b}{m} e^{\frac{b}{m}t}$ y $v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t$ con $\frac{dv}{dt} = \operatorname{sen} \omega t$, tendremos:

$$I = \frac{e^{\frac{b}{m}t}}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^T + \frac{b}{m\omega} \int_0^T e^{\frac{b}{m}t} \cos \omega t dt$$

Nos queda aún una integral por calcular. Vemos que es muy parecida a la primera, excepto que $\cos \omega t$ aparece en lugar de $\operatorname{sen} \omega t$. Volvamos a integrar por partes:

$$\begin{aligned}u &= e^{\frac{b}{m}t}; \frac{du}{dt} = \frac{b}{m} e^{\frac{b}{m}t} \\ v &= \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t; \frac{dv}{dt} = \cos \omega t \\ I &= -\frac{e^{\frac{b}{m}t}}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^T + \frac{b}{m\omega^2} e^{\frac{b}{m}t} \operatorname{sen} \omega t \Big|_0^T - \left(\frac{b}{m\omega} \right)^2 \int_0^T e^{\frac{b}{m}t} \operatorname{sen} \omega t dt.\end{aligned}$$

A primera vista no se ha progresado ya que la integral que nos queda es I , pero con un coeficiente $-\left(\frac{b}{m\omega}\right)^2$. Pasándola a la izquierda:

$$\left(1 + \left(\frac{b}{m\omega} \right)^2 \right) I = \frac{b}{m\omega^2} e^{\frac{b}{m}T} \operatorname{sen} \omega T + \frac{1}{\omega} - \frac{e^{\frac{b}{m}T}}{\omega} \cos \omega T$$

de donde podemos despejar I .

Notemos ahora que si, en lugar de escoger u y $\frac{dv}{dt}$ tal como lo hicimos en la segunda integración, hubiéramos tomado $u = \cos \omega t$ y $\frac{dv}{dt} = e^{\frac{b}{m}t}$, no hubiéramos logrado nada ya que esta elección deshace la primera integración por partes. La idea del método es pues la de tomar como u siempre a la primera función y encontrar la integral buscada en los dos miembros de una igualdad.

Finalmente la expresión para la velocidad es:

$$v(T) = v_0 e^{-\frac{b}{m}T} + \left(\frac{F_0}{(m\omega)^2} \operatorname{sen}\omega T - \frac{F_0}{m} \cos\omega T + \frac{F_0}{m} e^{-\frac{b}{m}T} \right) \frac{1}{1 + \frac{b^2}{m^2\omega^2}}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{F_0}{b^2 + m^2\omega^2} \left(\operatorname{sen}\omega t - m\omega \cos\omega t + m\omega e^{-\frac{b}{m}t} \right).$$

EJERCICIOS

2.3 Calcule $x(t)$; ¿qué sucede cuando $t \rightarrow \infty$? ¿Cómo se comparan estos resultados con los obtenidos cuando no hay fricción, es decir, cuando $b = 0$? Haga una gráfica cuando $v_0 = 0, x_0 = 0$.

2.4 Use el método de integración de esta sección para calcular

a) $\int \operatorname{sen} x e^{-x} dx$

b) $\int \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx dx$

c) $\int \operatorname{sen} px \cos qx dx$

d) $\int \cos px \cos qx dx$

e) calcule las tres últimas integrales usando las fórmulas de trigonometría.

2.5 Sea $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$, pruebe que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)!$

2.6 Pruebe que:

$$\int \cos^n x \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{1}{n+m} \cos^{n+1} x \operatorname{sen}^{m-1} x + \frac{m-1}{n+m} \int \cos^n x \operatorname{sen}^{m-2} x dx$$

2.7 Usando la fórmula anterior encuentre: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k} x dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k+1} x dx$

2.8 Pruebe que

$$\int x^k \operatorname{sen} x dx = -x^k \cos x + k \int x^{k-1} \cos x dx$$

y

$$\int x^k \cos x dx = x^k \operatorname{sen} x - k \int x^{k-1} \operatorname{sen} x dx$$

2.9 Pruebe que $\int \tan^k x dx = \frac{\tan^{k-1} x}{k-1} - \int \tan^{k-2} x dx$.

2.4. RESISTENCIA DEL AIRE Y MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

Cuando un cuerpo cae de una altura muy grande bajo la acción de su peso, la fricción con el aire hace que el movimiento no esté dado por la ley de caída libre. Hay una fuerza de resistencia que depende de la velocidad del cuerpo. Según la forma del cuerpo y su velocidad esa resistencia es proporcional a la velocidad o su cuadrado. Entonces, según la ley de Newton:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \text{Peso} + \text{resistencia}$$

Tomando el eje y hacia arriba, tendremos que resolver la siguiente ecuación:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + R \left(\frac{dy}{dt} \right)$$

donde la resistencia $R \left(\frac{dy}{dt} \right) = k \left| \frac{dy}{dt} \right| = -k \frac{dy}{dt}$ en el primer caso (como y disminuye, $\frac{dy}{dt}$ es negativo), y $R \left(\frac{dy}{dt} \right) = K \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$ en el segundo caso, con condiciones iniciales:

$$y(0) = h, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0 \quad (\text{si se suelta el cuerpo sin velocidad}).$$

1) *Estudiamos el primer caso:*

Si ponemos $v = \frac{dy}{dt}$, la ecuación se escribe:

$$m \frac{dv}{dt} + kv = -mg$$

es decir:

$$\frac{d}{dt} \left(v(t) e^{\frac{k}{m}t} \right) = -g e^{\frac{k}{m}t} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{mg}{k} e^{\frac{k}{m}t} \right).$$

Entonces, con $v(0) = 0$

$$v(t) = -\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Vemos que $v(t)$ tiene el valor límite $-\frac{mg}{k}$ y que $|v(t)|$ es siempre menor que $\frac{mg}{k}$. Usando otra vez el teorema fundamental:

$$y(t) = h - \frac{mg}{k} \left[t - \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right].$$

Para conocer la velocidad en el momento de la llegada al suelo, $y(t_1) = 0$, necesitaríamos resolver esta última igualdad para t , lo cual sólo se puede hacer

numéricamente. Para tener una mejor idea de esa velocidad transformaremos la ecuación en una ecuación para v en función de y :

Por la regla de la cadena:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v = - \left(\frac{k}{m} v + g \right) = - \frac{k}{m} \left(v + \frac{mg}{k} \right).$$

Si ponemos $z(y) = v(y) + \frac{mg}{k}$, con $z(h) = \frac{mg}{k}$, entonces:

$$\left(z - \frac{mg}{k} \right) \frac{dz}{dy} = - \frac{k}{m} z$$

es decir:

$$\frac{dz}{dy} - \frac{mg}{k} \frac{1}{z} \frac{dz}{dy} = - \frac{k}{m}.$$

Integrando desde h hasta y :

$$z - z(h) - \frac{mg}{k} \ln \frac{z}{z(h)} = - \frac{k}{m} (y - h).$$

Es decir:

$$v - \frac{mg}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v \right) = \frac{k}{m} (h - y)$$

De nuevo esta ecuación no se puede resolver exactamente, pero aquí v está expresada en términos de y .

Para $y = 0$ tendremos:

$$\frac{k}{mg} v - \ln \left(1 + \frac{k}{mg} v \right) = \frac{k^2}{m^2 g} h$$

y, recordando que vimos que $-\frac{mg}{k} < v < 0$, es decir, $0 < x < 1$, con $x = +\frac{k}{mg} v$, tenemos que resolver:

$$x + \ln(1 - x) = - \frac{k^2 h}{m^2 g}.$$

Ahora la función $x + \ln(1 - x)$ tiene derivada $\frac{-x}{1 - x}$, negativa para x entre 0 y 1; la función es decreciente y vale 0 en $x = 0$, $-\infty$ en $x = 1$. La ecuación tiene una sola solución, la cual se puede calcular numéricamente usando el método de Newton.

Por otra parte $\left(\frac{dh}{dx} \right)^{-1} = \left(\frac{mg}{k^2} \frac{x}{1 - x} \right)^{-1}$ por el teorema de la función inversa: x , y por lo tanto $|v|$, es una función creciente de h , lo cual es conforme a la realidad.

Además, usando: $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(\theta x)\frac{x^3}{3!}$, con $f(x) = x + \ln(1-x)$, tenemos:

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3(1-\theta x)^3} = -\frac{k^2 h}{m^2 g}$$

es decir:

$$2gh - v^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{mg} \frac{|v|^3}{\left(1 - \frac{\theta k}{mg} |v|\right)^3}.$$

Esto demuestra que $|v|$ es menor que $\sqrt{2gh}$, velocidad de caída libre, y que estamos cerca de esa velocidad para $|v|$, es decir, h , pequeño, ya que $|v|$ es una función creciente de h .

II) Veamos ahora el caso de resistencia cuadrática:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + mg = K \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Poniendo

$$v = \frac{dy}{dt} : \frac{dv}{dt} = -g + \frac{K}{m} v^2$$

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v^2 - \frac{mg}{K}} = \frac{K}{m}.$$

Tenemos una ecuación parecida a la que obtuvimos para la logística: un denominador que es un polinomio con raíces $\pm \sqrt{\frac{mg}{K}}$. Escribimos pues

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{K}} = \frac{\alpha}{v - \sqrt{\frac{mg}{K}}} + \frac{\beta}{v + \sqrt{\frac{mg}{K}}} = \frac{(\alpha - \beta)v + \sqrt{\frac{mg}{K}}(\alpha + \beta)}{v^2 - \frac{mg}{K}}.$$

Vemos entonces que:

$$\alpha + \beta = 0, \alpha - \beta = \sqrt{\frac{K}{mg}}$$

y por lo tanto

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{mg}}$$

La ecuación se escribe:

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v - \sqrt{\frac{mg}{K}}} - \frac{\frac{dv}{dt}}{v + \sqrt{\frac{mg}{K}}} = 2\sqrt{\frac{Kg}{m}}$$

con integral:

$$\ln \left(\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{K}}}{-\sqrt{\frac{mg}{K}}} \right) - \ln \left(\frac{v + \sqrt{\frac{mg}{K}}}{\sqrt{\frac{mg}{K}}} \right) = 2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t$$

ya que $v(0) = 0$. Es decir:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sqrt{\frac{mg}{K}} - v}{\sqrt{\frac{mg}{K}} + v} &= 2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t \\ \sqrt{\frac{mg}{K}} + v &= \left(\sqrt{\frac{mg}{K}} - v \right) e^{-2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t} \\ v(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{K}} \left\{ \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}} \right\} = -\sqrt{\frac{mg}{K}} \tanh \left(\sqrt{\frac{Kg}{m}}t \right) \end{aligned}$$

Si t es grande, $\tanh \left(\sqrt{\frac{Kg}{m}}t \right)$ tiende a 1 y $|v|$ tiende a $\sqrt{\frac{mg}{K}}$ siendo siempre menor que ese valor.

(Recordamos que $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; además $(\cosh x)' = \sinh x$)

Integrando de nuevo:

$$y(t) - h = -\sqrt{\frac{mg}{K}} \sqrt{\frac{m}{Kg}} \ln \left(\cosh \sqrt{\frac{Kg}{m}}t \right) \quad (\cosh(0) = 1)$$

$$\text{Por lo tanto: } \cosh \left(\sqrt{\frac{Kg}{m}}t \right) = e^{\frac{K}{m}(h-y)} = \frac{e^{\sqrt{\frac{Kg}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{Kg}{m}}t}}{2}$$

Tomando $z = e^{\frac{Kg}{m}}$, obtenemos: ($z > 1$)

$$z^2 - 2ze^{\frac{K}{m}(h-y)} + 1 = 0, \quad z = e^{K(h-y)/m} + \sqrt{e^{2K(h-y)/m} - 1}$$

y:

$$t = \sqrt{\frac{m}{Kg}} \ln \left(e^{\frac{K}{m}(h-y)} + \sqrt{e^{\frac{2K}{m}(h-y)} - 1} \right)$$

obteniendo así el tiempo de llegada al suelo, al tomar $y = 0$.

EJERCICIOS

1) Pruebe que $\tanh(\ln u) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$

2) Sustituyendo el valor de t en la expresión para $v(t)$, vea que

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{K}} \sqrt{1 - e^{-\frac{2K}{m}(h-y)}}.$$

3) Vea que $v \frac{dv}{dy} = -g + \frac{K}{m} v^2$.

Resuelva esta ecuación y encuentre $v(y)$.

$$\text{Vemos que } \sqrt{\frac{mg}{K}} - |v| = \frac{e^{-\frac{2K}{m}(h-y)}}{1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2K}{m}(h-y)}}} \sqrt{\frac{mg}{K}} \leq e^{-\frac{2K}{m}(h-y)} \sqrt{\frac{mg}{K}}$$

por lo tanto la velocidad al llegar al suelo es prácticamente la velocidad límite para alturas relativamente pequeñas. Por ejemplo, si un paracaidista y su equipo tienen una masa de 100 Kg, con $K = 36$, entonces $\sqrt{\frac{mg}{K}} \simeq 5.2 \text{ m/s} = 19 \text{ km/h}$, y saltando de 1000 mts. llegará al suelo en:

$$t_{\text{suelo}} \simeq \sqrt{\frac{m}{Kg}} \text{Ln} \left(2e^{\frac{Kh}{m}} \right) \simeq \sqrt{\frac{K}{mg}} h \simeq 133 \text{ seg.}$$

$$t_{\text{suelo}} \simeq 2 \text{ minutos, } 13 \text{ segundos.}$$

Pero, si no se abre el paracaídas, con $K = \frac{1}{4}$ entonces $\sqrt{\frac{mg}{K}} \simeq 63 \text{ m/s} \simeq 226 \text{ km/h}$, llegando al suelo en 11 segundos con muerte segura.

III) Para resolver este problema, hemos escrito el cociente de dos polinomios como una suma de fracciones donde los denominadores son partes del denominador del cociente. Sistematizaremos ahora este método, llamado de *fracciones parciales*:

a) Supongamos que queremos calcular: $\int \frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2} dx$.

Vemos primero que el numerador no tiene relación alguna con la derivada del denominador, por lo tanto, no se trata de un logaritmo, pero:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x + 2)(x - 1)$$

Escribamos pues:

$$\frac{2x + 3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

determinado A, B, C para que las dos expresiones sean iguales. Necesitamos pues:

$$2x + 3 = A(x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

$$2x + 3 = (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x - 2A$$

para esto necesitamos

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= 3 \end{aligned}$$

por lo tanto $A = -\frac{3}{2}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -\frac{1}{6}$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= -\frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{3} \operatorname{Ln}(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x+2) \\ \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} dx &= \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(x-1)^{10}}{x^9(x+2)} \right). \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Encuentre $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} dx$. $\int \frac{5x^2}{x^3-x} dx$

b) Ahora bien, puede ser que el denominador *tenga raíces repetidas*, teniendo un factor elevado a cierta potencia, por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}.$$

Empleando el mismo método escribimos:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Aparece el factor $\frac{1}{(x-1)^2}$ ya que este término puede venir de una suma de términos con denominadores $(x-1)$ y $(x-1)^2$.

Vemos entonces que:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \\ 1 &= x^2(A+B) + x(C-B-2A) + A \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A + B - C &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x-1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

EJERCICIO:

Calcule $\int \frac{dx}{x(x-2)^3}$ escribiendo

$$\frac{1}{x(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}.$$

c) Hasta ahora el denominador se factorizaba en productos de polinomios de primer grado a una cierta potencia. Pero no es éste siempre el caso: pueden aparecer factores de segundo grado sin raíces, por ejemplo en

$$\int \frac{4 dx}{x(x^2+4)}.$$

Escribiremos

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Vemos entonces que $(A+B)x^2 + Cx + 4A = 4$

$$A = 1, \quad C = 0, \quad B = -A = -1.$$

Entonces

$$\int \frac{4 dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2+4} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+4).$$

EJERCICIO:

Calcule $\int \frac{dx}{x^3+8}$ viendo que $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ y

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}.$$

d) Finalmente examinaremos el caso donde aparece un factor de *segundo grado elevado a una potencia*, por ejemplo:

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} dx.$$

Al igual que con factores de primer grado, el factor $(x^2 + 1)^2$ puede venir de dos denominadores de la forma $x^2 + 1$ y $(x^2 + 1)^2$, por eso buscamos una descomposición de la forma:

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 3 &= (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D \\ &= Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + B + D \\ A = 2, B = 0, \quad A + C = 1, B + D = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{-x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

La última integral es de *un tipo que aún no hemos calculado*:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} &= \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x}{2} \frac{(-2x)}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \text{Arctan } x + \frac{x}{2} \frac{1}{x^2 + 1} - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctan } x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo integrando por partes.

$$\text{Por lo tanto: } \int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = \text{Ln}(x^2 + 1) + \frac{3}{2} \text{Arctan } x + \frac{3x + 1}{2(x^2 + 1)}.$$

e) Formalizaremos ahora nuestros ejemplos al *caso general de un cociente de polinomios*, es decir, *una función racional*:

$$\frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1) Si $m \geq n$ podemos dividir P entre Q y obtener:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con el grado de $R(x)$ menor que el grado de $Q(x)$ y $L(x)$ de grado $m - n$ determinando los coeficientes de estos polinomios mediante la identificación de los coeficientes de las mismas potencias de x .

2) *Suponiendo* $m < n$, $Q(x)$ se puede escribir como el producto de factores de primer grado a una cierta potencia y de factores de segundo grado, sin raíces, también a una cierta potencia.

Basta entonces escribir el cociente $P(x)/Q(x)$ como una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{a_1}{x-c} + \frac{a_2}{(x-c)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x-c)^k} + \dots + \frac{b_1x+c_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} + \dots + \frac{b_\ell x+c_\ell}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\ell}$$

Si c es una raíz de $Q(x)$ con multiplicidad k y si el polinomio $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, sin raíces, aparece a una potencia ℓ , se identifican entonces todos los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ y se integra cada término como lo hicimos en los ejemplos, acordándose de escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + A^2)^p} &= \frac{1}{A^2} \frac{(x^2 + A^2 - x^2)}{(x^2 + A^2)^p} \\ &= \frac{1}{A^2} \frac{1}{(x^2 + A^2)^{p-1}} + \frac{x}{2(p-1)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(x^2 + A^2)^{p-1}} \right) \end{aligned}$$

e integrando por partes.

EJERCICIOS: Calcule las siguientes integrales:

1) $\int_1^2 \frac{(x-3)dx}{x^2+x^3} \left(= 4 \operatorname{Ln} \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right)$

2) $\int_3^4 \frac{5t^3-4t}{t^4-16} dt \left(= \operatorname{Ln} \frac{12}{5} + \frac{3}{2} \operatorname{Ln} \frac{20}{13} \right)$

3) $\int_0^1 \frac{2x^2+x+3}{(x^2+1)(x+1)^2} dx \left(= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \operatorname{Ln} 2 \right)$

4) $\int \frac{t^5 dt}{(t^2+4)^2}$

5) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

f) Finalmente, hay integrales que se pueden convertir a integrales de funciones racionales, por ejemplo:

1) $\int R(e^x) dx$, donde $R(y) = \frac{P(y)}{Q(y)}$ es racional.

Al poner $y = e^x$, esta integral se transforma en: $\int \frac{R(y)}{y} dy$ que es racional.

EJERCICIO:

Calcule $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx (= \operatorname{Ln}(e^x-1))$

2) $\int R(x, (ax+b)^{\frac{1}{n}}) dx$ donde $R(x, y)$ es un cociente de dos polinomios en x y y (n entero) con

$$y = (ax+b)^{\frac{1}{n}}, dy = \frac{a}{n}(ax+b)^{\frac{1}{n}-1} dx, x = \frac{y^n - b}{a}.$$

La integral vale: $\int R\left(\frac{y^n - b}{a}, y\right) \frac{n}{a} y^{n-1} dy$, racional en y .

EJERCICIO:

Calcule

$$\int_0^1 x(2x-1)^{\frac{1}{3}} dx$$

3) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx$

EJERCICIOS:

a) Ponga $y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$ y convierta esa integral en una integral de una función racional.

b) Calcule $\int \sqrt{\frac{4+3x}{4-3x}} dx$

4) $\int R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$

Si ponemos $y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, entonces

$$\cos \theta = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \operatorname{sen} \theta = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$dy = \frac{1}{2}(1+y^2)d\theta$$

EJERCICIOS:

a) Calcule $\int \frac{d\theta}{\cos \theta}$

b) Calcule $\int \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} d\theta$

c) Calcule $\int \frac{d\theta}{a+b \cos \theta}$ con $a > 0, b > 0$.

- 5) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, al poner $x = a \cos y$ obtenemos el caso anterior.
- 6) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, al poner $x = a \cosh y$ obtenemos el caso 1.
- 7) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, al poner $x = a \tan y$ obtenemos el caso 4.
- 8) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, según el valor del discriminante se reduce a uno de los 3 casos anteriores, al escribir $ax^2 + bx + c$ como

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

2.5. OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Si tenemos un resorte que se mueve en un fluido, por ejemplo un amortiguador en una caja de aceite, o un sismógrafo, entonces, además de la fuerza de oposición $-kx$ del resorte, tendremos una fuerza que se opone al movimiento debido a la fricción y que es proporcional, para fricciones debidas a un fluido, a la velocidad.

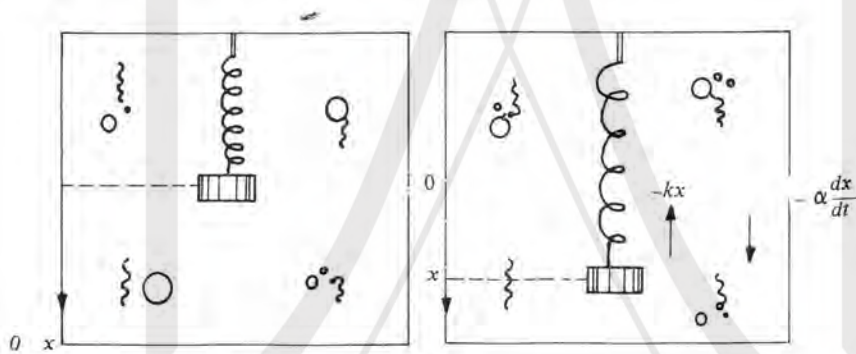


Figura 2.3

La ley de Newton se escribe entonces:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt}$$

o sea:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Consideremos $y = xe^{\frac{\alpha}{2m}t}$
entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{2m} x \right) e^{\frac{\alpha}{2m}t} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 x \right) e^{\frac{\alpha}{2m}t}. \end{aligned}$$

Pero, según la ecuación: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{m}x$.

$$\text{Entonces: } \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\left(\frac{\alpha}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right) x e^{\frac{\alpha}{2m}t} = \frac{\alpha^2 - 4km}{4m^2} y.$$

Es decir

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma y = 0, \text{ con } \gamma = \frac{4km - \alpha^2}{4m^2}$$

a) Si γ es positivo, esta es la ecuación del oscilador armónico de la sección 1.2 del primer capítulo, con solución

$$y(t) = a \cos \sqrt{\gamma}t + b \operatorname{sen} \sqrt{\gamma}t$$

$$\text{Entonces: } x(t) = \left(a \cos \sqrt{\frac{4km - \alpha^2}{2m}}t + b \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4km - \alpha^2}{2m}}t \right) e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$$

El movimiento es *oscilatorio*, de la forma:

Es lo que pasa con algunos coches pesados con amortiguamiento mal planeado: α es demasiado pequeño.

b) Si $\gamma = 0$ entonces $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ y por lo tanto $y = a + bt$.

Entonces

$$x(t) = (a + bt)e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$$

En este caso se dice que hay *amortiguamiento crítico*.

EJERCICIO:

Encuentre la posición del máximo y pruebe que $x(t) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$

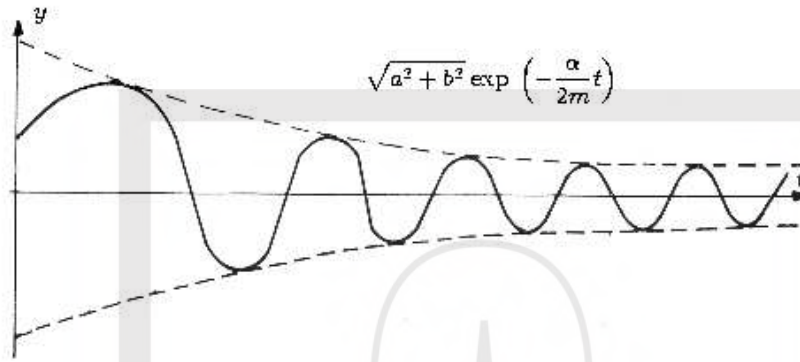


Figura 2.4

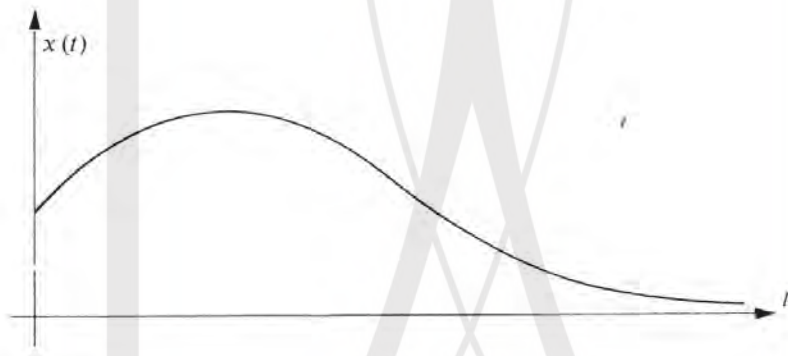


Figura 2.5

c) Finalmente si γ es negativo tenemos un nuevo tipo de ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \beta^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \beta^2 = -\gamma = \frac{\alpha^2 - 4km}{4m^2}$$

Ahora sabemos que $e^{\delta t}$ es solución de:

$$\frac{d(e^{\delta t})}{dt} - \delta e^{\delta t} = 0$$

Derivando: $\frac{d^2}{dt^2}(e^{\delta t}) = \frac{d}{dt}(\delta e^{\delta t}) = \delta^2 e^{\delta t}$.

Entonces: $e^{\beta t}$ y $e^{-\beta t}$ son soluciones de la ecuación, y también:

$$y(t) = ae^{\beta t} + be^{-\beta t}$$

Entonces:

$$y_0 = a + b$$

$$v_0 = \beta(a - b)$$

Es decir:

$$a = \frac{y_0 + \frac{v_0}{\beta}}{2} \quad b = \frac{y_0 - \frac{v_0}{\beta}}{2}$$

y esa es la *única solución con estos datos iniciales*, ya que si tuvieramos dos soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ vemos que

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

satisface la ecuación y tiene datos iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Pero si multiplicamos la ecuación por $y'(t)$:

$$y'(t)y''(t) - \beta^2 y'(t)y(t) = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y'^2(t) - \frac{\beta^2}{2} y^2(t) \right) = 0.$$

Es decir: $y'^2(t) - \beta^2 y^2(t) = y'^2(0) - \beta^2 y^2(0) = 0$.

Por lo tanto

$$y'(t) = \pm \beta y(t)$$

con solución:

$$y(t) = Ae^{\pm \beta t}.$$

Pero como $y(0) = 0 = A$ vemos que $y(t) \equiv 0$ para todo t .

Por lo tanto

$$y_1(t) \equiv y_2(t).$$

Entonces, en el caso de γ negativo:

$$x(t) = \left(ae^{\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m} t} + be^{-\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4km}}{2m} t} \right) e^{-\frac{\alpha}{2m} t}$$

La gráfica es de la forma:

EJERCICIO:

Encuentre la localización del máximo y pruebe que $x(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a ∞ , recordando que α, k, m , son constantes positivas.

Estas oscilaciones amortiguadas se encuentran con mucha frecuencia en fenómenos naturales, como por ejemplo en péndulos, resortes de torsión, circuitos eléctricos, circuitos hidráulicos, donde al cabo de cierto tiempo el régimen del fenómeno es prácticamente estacionario.

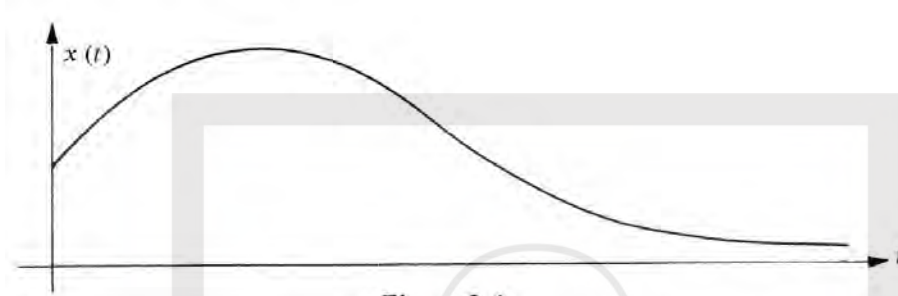


Figura 2.6

Por ejemplo, si a nuestro resorte le agregamos un peso, la ley de Newton se escribe:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = mg$$

(el eje x es vertical y orientado hacia abajo). Entonces

$x_M = \frac{mg}{k}$ es solución de la ecuación, y si llamamos

$$y(t) = x(t) - x_M$$

vemos que:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

ecuación que ya hemos estudiado.

Por ejemplo, si $4km - \alpha^2 > 0$, la solución será

$$x(t) = \frac{mg}{k} + \left(a \cos \sqrt{\frac{4km - \alpha^2}{2m}} t + b \operatorname{sen} \sqrt{\frac{4km - \alpha^2}{2m}} t \right) e^{-\frac{\alpha}{2m} t}$$

obteniendo así oscilaciones alrededor del valor $\frac{mg}{k}$.

Podemos usar este dispositivo como báscula de precisión, midiendo $x(t)$ en una escala. El valor límite será $\frac{mg}{k}$, dando el peso deseado.

2.6. PÉNDULO

Como último ejemplo, estudiaremos el movimiento de un péndulo de longitud ℓ y de masa m (figura 2.7).

Sobre la masa están actuando su peso, vertical, y la tensión T del hilo. Aplicando entonces la ley de Newton, vemos que:

$$mx'' = -T \operatorname{sen} \theta$$

$$my'' = -mg + T \cos \theta$$

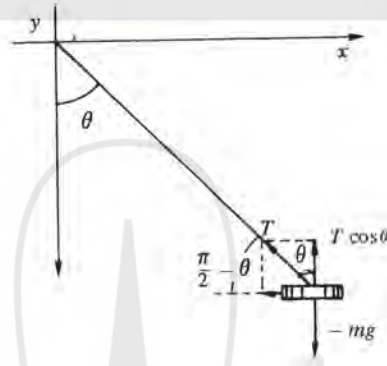


Figura 2.7

Ahora,

$$\begin{aligned} x &= l \operatorname{sen} \theta \\ y &= -l \cos \theta \\ x' &= l \cos \theta \theta' \\ y' &= l \operatorname{sen} \theta \theta' \\ x'' &= -l \operatorname{sen} \theta \theta'^2 + l \cos \theta \theta \theta'' = -\frac{T}{m} \operatorname{sen} \theta \\ y'' &= l \cos \theta \theta'^2 + l \operatorname{sen} \theta \theta \theta'' = -g + \frac{T}{m} \cos \theta \\ &= -g + \left(l \theta'^2 - l \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \theta \theta'' \right) \cos \theta \end{aligned}$$

Entonces $l \operatorname{sen}^2 \theta \theta'' = -g \operatorname{sen} \theta - l \cos^2 \theta \theta''$. Por lo tanto

$$\theta'' + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Ahora, si θ es pequeño, sabemos que $\operatorname{sen} \theta \sim \theta$, la ecuación es aproximadamente:

$$\theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0$$

cuya solución es $\theta(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \phi \right)$.

El péndulo tiene un *movimiento periódico*, con período $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Por ejemplo, si $\ell = 1$ metro, el péndulo tardará aproximadamente 2 segundos para regresar a su posición inicial. En realidad el período depende de la amplitud de la oscilación, la cual, debido a resistencia, varía con el tiempo. Es por eso que los péndulos en los relojes tienen un resorte que da, a cada oscilación, un pequeño impulso de manera que el péndulo conserve una amplitud y un período exactos.

Ahora, si multiplicamos la ecuación:

$$\theta'' + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0$$

por θ' e integramos, tendremos:

$$\theta'^2 - \frac{2g}{\ell} \cos \theta = \text{constante} = \theta'^2(0) - \frac{2g}{\ell} \cos \theta(0) = A$$

$\left(\frac{A}{2} m \ell \right)$ es la energía del péndulo, la parte $\frac{1}{2} m \ell \theta'^2$ correspondiendo a la *energía cinética*, la otra a la *energía potencial*).

Entonces si graficamos la función $y^2 - \frac{2g}{\ell} \cos \theta = A$ para distintos valores de A , es decir, para distintas condiciones iniciales, $\theta'(0)$ y $\theta(0)$, tendremos una imagen del comportamiento del péndulo ya que para cada posición de éste, tendremos su velocidad angular θ' .

Vemos que $y = \pm \sqrt{A + \frac{2g}{\ell} \cos \theta}$ es una función periódica en θ , definida para ángulos θ tales que $A + \frac{2g}{\ell} \cos \theta \geq 0$, o sea para

$$\theta'(0)^2 + \frac{2g}{\ell} (\cos \theta - \cos \theta(0)) \geq 0.$$

Por ejemplo, si $\theta'(0) = 0$, esto es válido sólo para θ tal que $|\theta| \leq |\theta(0)|$, mientras que si $\theta(0) = 0$, necesitamos: $\cos \theta \geq 1 - \frac{\ell}{2g} \theta'(0)^2$ limitando los valores de θ si $1 - \frac{\ell}{2g} \theta'(0)^2 \geq -1$ es decir si $|\theta'(0)| \leq \sqrt{\frac{4g}{\ell}}$. En general no hay limitación sobre los valores de θ si:

$$\cos \theta \geq \cos \theta(0) - \frac{\ell}{2g} \theta'(0)^2 \text{ es válido para todo } \theta,$$

implicando que: $\cos \theta(0) - \frac{\ell}{2g} \theta'(0)^2 \leq -1$, ó $A \geq A_0 = \frac{2g}{\ell}$

EJERCICIO

<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Estudie la función $y \pm \sqrt{A + A_0 \cos \theta}$, teniendo particular cuidado en la pendiente de la gráfica en los puntos de intersección con el eje θ , y compruebe que la gráfica es:

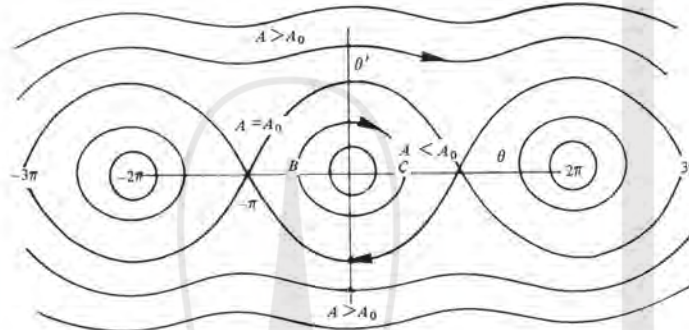


Figura 2.8

Las gráficas con $A > A_0$ corresponden a péndulos que hacen la *vuelta completa* y las gráficas con $A < A_0$ corresponden a péndulos que *oscilan alrededor de la posición vertical*.

Ahora si integramos la ecuación:

$$\frac{\theta'}{\sqrt{A + A_0 \cos \theta}} = 1$$

tendremos:

$$t = \int_0^t \frac{\theta'(s)}{\sqrt{A + A_0 \cos \theta(s)}} ds = \int_{0(0)}^{\theta(t)} \frac{d\zeta}{\sqrt{A + A_0 \cos \zeta}}$$

poniendo $\zeta = \theta(s)$.

Podríamos pensar que, si encontramos esa integral, tendremos t como función de θ y, por la función inversa, θ en función de t . El problema aquí es que esa integral no se puede calcular explícitamente ya que es del tipo elíptico, parecida a la integral que da la longitud de una elipse. Pero lo que sí podemos hacer es dar una aproximación del período de la oscilación en el caso $A < A_0$. El período es el tiempo necesario para que el péndulo regrese a su posición y velocidad iniciales, es decir, para dar una vuelta completa en la gráfica anterior, y, por las simetrías de esa gráfica, dos veces el tiempo para ir desde el punto B hasta el punto C , puntos de mayor amplitud θ_0 , y de velocidad 0.

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{A + A_0 \cos \zeta}}$$

Aquí $\theta(0) = -\theta_0$, $\theta'(0) = 0$, $A = -A_0 \cos \theta_0 = -\frac{2g}{\ell} \cos \theta_0$.

Si usamos la relación $\cos \xi = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2}$

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{4g}{\ell} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2}}}}.$$

Si ponemos $\epsilon = \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_0}{2} \right)$, y cambiamos de variables:

$$x = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{sen} \left(\frac{\xi}{2} \right), \text{ con } dx = \frac{1}{2\epsilon} \cos \left(\frac{\xi}{2} \right) d\xi$$

$$dx = \frac{1}{2\epsilon} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2}} d\xi = \frac{1}{2\epsilon} \sqrt{1 - \epsilon^2 x^2} d\xi,$$

donde usamos el hecho de que $\cos \frac{\xi}{2}$ es positivo ya que como $|\xi| < \pi$, $\left| \frac{\xi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$.

Entonces:

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\epsilon^2 x^2)}}$$

Ahora usaremos el hecho de que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y}} \sim 1 + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}y^2 + \frac{5}{16}y^3 + \dots \text{ para } |y| < 1$$

EJERCICIO:

Compruebe esta fórmula, usando el teorema de Taylor.

$$\text{Entonces: } T \simeq 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 + \frac{\epsilon^2 x^2}{2} + \frac{3}{8}\epsilon^4 x^4 + \frac{5}{16}\epsilon^6 x^6 + \dots \right)$$

ya que $|\epsilon| < 1$ y $|x| \leq 1$.

Poniendo $x = \operatorname{sen} \phi$, $dx = \cos \phi d\phi = \sqrt{1-x^2} d\phi$, ya que entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, $\cos \theta$ es positivo, obtenemos

$$T \simeq 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{3}{8}\epsilon^4 \operatorname{sen}^4 \phi + \frac{5}{16}\epsilon^6 \operatorname{sen}^6 \phi + \dots \right) d\phi$$

y usando los resultados del ejercicio al final de la sección 2.3 de este capítulo:

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k} \phi d\phi = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \frac{2k-5}{2k-4} \dots \frac{1}{2} \pi$$

y por lo tanto

$$T \simeq 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\pi + \frac{\epsilon^2}{4}\pi + \frac{9\epsilon^4\pi}{64} + \frac{25}{(16)^2}\epsilon^6\pi + \dots \right)$$

con $\epsilon = \sin \frac{\theta_0}{2} \sim \frac{\theta_0}{2}$ si θ_0 es pequeño.

Vemos entonces que el período que encontramos al linearizar la ecuación es sólo la primera aproximación del período real y que éste depende efectivamente de la amplitud θ_0 de la oscilación del péndulo.

Índice alfabético

- acción de masas, 49
- aceleración, 4
- aceleración radial, 31
- alcance, 20
- amortiguamiento crítico, 70
- amplitud, 14

- directriz, 29
- doble integración por partes, 55

- ecuación diferencial, 10
- energía, 11
- energía cinética, 11, 75
- energía potencial, 11, 75
- excentricidad, 29

- fracciones parciales, 59, 63

- gravedad, 5
- gravitación universal y gravedad, 40

- ley de Newton, 18
- leyes de Kepler y ley de gravitación universal, 27
- leyes de poblaciones, 47
- logística, 51

- método de capas, 35
- Malthus, 47

- Newton, 3

- oscilaciones amortiguadas, 69
- oscilador, 9

- péndulo, 73, 75
- período, 14, 75
- primera ley de Kepler, 33

- radio crítico, 53
- reactor nuclear, 53

- tercera ley de Kepler, 34
- tiro parabólico, 17
- toro, 38

- vector, 17
- vector aceleración, 18, 23
- vector tangente, 26
- vector velocidad, 18, 23
- velocidad, 3
- velocidad aereal, 29
- Verhulst, 47