



CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
FASCÍCULO V

APROXIMACIÓN

José Luis Abreu
José Angel Canavati
Jorge Ize
Antonmaria Minzoni

24 de febrero de 2006

<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

PRÓLOGO

Al llegar a este fascículo de la serie de cálculo diferencial e integral, el estudiante tiene un conocimiento bastante completo de la herramienta esencial del cálculo. En los cuatro primeros fascículos, los conceptos básicos, las propiedades y las técnicas fundamentales de la derivada y de la integral fueron explicadas y utilizadas en una gama amplia de situaciones.

En este fascículo presentamos, además de la interpretación geométrica de la segunda derivada, un material poco acostumbrado a este nivel, es decir, el uso del cálculo como método de aproximación en situaciones concretas.

Consideramos efectivamente necesario proporcionar a nuestro lectores ejemplos de cómo los matemáticos aplicados, ingenieros, físicos, biólogos y otros científicos utilizan el cálculo en sus distintas disciplinas.

Así pues, el primer capítulo trata de los aspectos geométricos de la segunda derivada y de aproximación de una función por polinomios, de un cero de una función por una serie y de una integral por integrales simples. Dentro de ese capítulo, quisiéramos destacar el uso de la segunda derivada para estudiar la concavidad de gráficas, en particular de la función inversa, la determinación de máximos y mínimos, las interpolaciones y aproximaciones cuadráticas y de orden mayor dadas por el teorema de Taylor con el cálculo del error.

El segundo capítulo, sobre cálculo numérico, tiene una doble relevancia, por el constante uso de éste en una gran parte de las ciencias, con la ayuda de computadoras, y como ejemplo de procesos límites: podemos citar primero, el método de Newton, como límite de series y luego, el cálculo de integrales, como límite de polinomios simples, estimando en ambos casos el error cometido con la ayuda del teorema de Taylor.

En el último capítulo tratamos el problema de ajuste de curvas con ejemplos concretos. Introducimos así al lector a la muy importante actividad de construir y entender un modelo matemático. Consideramos efectivamente que el lector tiene ya los elementos necesarios para aplicar el cálculo a una gran variedad de situaciones, por lo menos en primera aproximación, y para ser motivado en caso de dificultad a profundizar sus conocimientos. Proponemos entonces varios ejemplos de ajustes de curvas, con el mismo espíritu que en la sección de integración numérica, introduciendo de paso el método de integración por fracciones parciales y el cálculo de volúmenes cuya sección transversal es conocida, mediante el llamado principio de Cavalieri.

Este capítulo es, además, una introducción al último fascículo de la serie de cálculo, el cual se dedica al estudio de distintos modelos matemáticos.

CONTENIDO

Introducción: EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO	1
Capítulo 1: SEGUNDA DERIVADA	3
1.1 Concavidad	4
1.2 Gráfica de la función inversa	14
1.3 Determinación de máximos y mínimos	20
1.4 Interpolación y aproximación cuadrática	26
Capítulo 2: CÁLCULO NUMÉRICO	41
2.1 Método de Newton	44
2.2 Integración numérica	51
2.2.1 Método del trapecio	53
2.2.2 Método del punto medio	57
2.2.3 Método de Simpson	60
Capítulo 3: AJUSTE DE CURVAS	65
3.1 Un modelo de ganancias	66
3.2 Avenidas de un río e integración usando el arcotangente	69
3.3 Modelo de una presa y volúmenes de sólidos de sección transversal conocida	73
3.4 Ajuste de una curva, regresión lineal	81
3.5 Conclusiones	83
Índice alfabético	85

INTRODUCCIÓN

EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En una gran parte de este fascículo estudiaremos más a fondo lo que hemos bosquejado en los dos últimos fascículos: cómo obtener más información de una función conociendo solamente el signo de su derivada, es decir, usando el teorema del valor medio.

Recordaremos primero este importante resultado para aplicarlo, en el primer capítulo, al estudio teórico de una función, analizando el significado geométrico de la segunda derivada y su relación con los conceptos de concavidad y aproximación cuadrática y, en el segundo capítulo, veremos algunas aplicaciones al cálculo numérico.

En el tercer fascículo de cálculo, capítulo 2, sección 2.3, enunciamos y justificamos el teorema del valor medio que dice:

Si $f(x)$ es una función con derivada en todo punto de un intervalo $[a, b]$ entonces existe un punto c entre a y b tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Geoméricamente, el teorema dice que hay por lo menos un punto c donde la tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela al segmento que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (véase la figura 0.1).

Si $f(a) = f(b)$, este teorema nos afirma que hay un punto entre a y b , con tangente horizontal. Este punto puede corresponder a un extremo local de $f(x)$.

Además, usando la forma:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h$$

con algún θ : $0 < \theta < 1$,

(poniendo $a = x_0$, $b = x_0 + h$, $c = x_0 + \theta h$), vimos cómo se podía usar este resultado para darse una idea del error que se comete al aproximar $f(x_0 + h)$

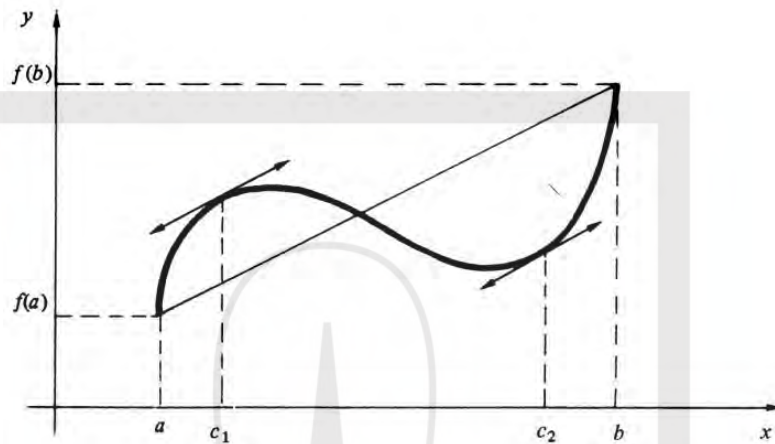


Figura 0.1

por

$$y_T(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$$

que hemos llamado la *aproximación lineal* de $f(x)$.

También, en el fascículo de cálculo IV, hemos usado varias veces el teorema del valor medio para establecer las fórmulas para calcular volúmenes y áreas de superficies de revolución. Recomendamos al lector un repaso de estas aplicaciones antes de seguir con el ejemplo que damos a continuación.

Sabemos que si un vehículo tiene una velocidad instantánea $v(t)$, entonces la distancia recorrida entre el instante inicial y el instante t será:

$$d(t) = \int_0^t v(s) ds.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, la función $d(t)$ tiene derivada $d'(t) = v(t)$. Si ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función $d(t)$ en el intervalo $[0, T]$ obtenemos un tiempo c entre 0 y T tal que:

$$v(c) = \frac{d(T) - d(0)}{T - 0} = \frac{d(T)}{T}.$$

Como $d(T)/T$ representa la velocidad promedio del vehículo entre los instantes 0 y T , el teorema del valor medio dice que en algún momento del recorrido (pueden ser varios) el vehículo alcanzó su velocidad promedio, lo cual es intuitivamente muy claro.

Ejercicio 0.1: Pruebe que existe c entre a y b tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Capítulo 1

SEGUNDA DERIVADA

En las conclusiones del tercer fascículo, nos dimos cuenta que la información que podíamos sacar del estudio de la derivada de una función no era suficiente. Por ejemplo, no podíamos decir si la gráfica de la función $y = x^2 + ax + b$ tenía ondulaciones o no (figura 1.1).

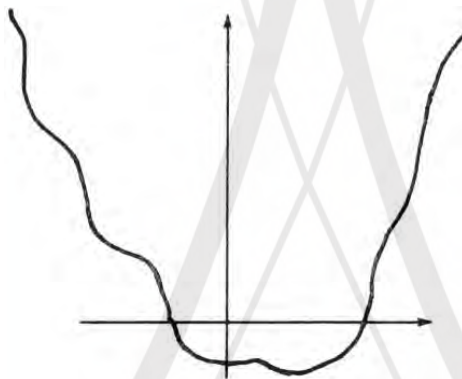


Figura 1.1

Ahora bien, si tenemos una función $f(x)$, sabemos cómo encontrar su derivada $f'(x)$: por ejemplo, $x^2 + ax + b$ tiene derivada $2x + a$. También esta última función, $2x + a$, tiene derivada y es 2.

En general, la función $g(x) = f'(x)$ puede tener una derivada $g'(x)$. La derivada de la derivada se llama la segunda derivada de $f(x)$ y se denota:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \text{ ó } f''(x).$$

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ entonces

$$f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

y

$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

Podemos continuar: la segunda derivada puede tener una derivada que sería la tercera derivada de $f(x)$: $\frac{d^3 f}{dx^3}$ o $f'''(x)$.

La cuarta derivada: $\frac{d^4 f(x)}{dx^4}$ o $f^{(4)}(x)$.

La n -ésima derivada: $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ o $f^{(n)}(x)$.

Ejercicios

1.1 Calcule la segunda derivada de:

- a) $x^4 + x$ b) $\cos x$ c) $\sin x$ d) e^x
 e) $\log x$ f) $\frac{x}{x^2+1}$ g) $\frac{\tan x}{x}$ h) $4\sqrt{x-x^2}$.

1.2 Calcule la 5a. derivada de $x^4 + x - 1$.

1.3 ¿Qué se puede decir de la 6a. derivada de un polinomio de grado 6? ¿De la 7a? ¿De la 8a?

1.4 Calcule la k -ésima derivada de x^m .

Ahora bien, ¿para qué sirve la segunda derivada y por qué nos interesa la segunda y no la cuarta? La segunda derivada es importante tanto geométrica como físicamente. En mecánica, representa la aceleración de una partícula y permite determinar el movimiento, usando la Segunda Ley de Newton. Una gran parte del último fascículo estará dedicada al estudio de esta ley. Por el momento, daremos su interpretación geométrica en relación con la concavidad de una curva y su aproximación cuadrática.

1.1 CONCAVIDAD

Si tenemos una función $f(x)$, sabemos que $f'(x)$ representa la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$. $f''(x)$ representa por lo tanto la pendiente de la tangente a la curva $y = f'(x)$, indicándonos las variaciones de $f'(x)$. Si, por ejemplo, en un intervalo $f''(x)$ es positiva, entonces $f'(x)$ es creciente. Geométricamente, la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ crece; es decir, el ángulo de la tangente con el eje x va creciendo ya que hemos visto que la función $\tan \theta$ es una función creciente con respecto a θ (figura 1.2).

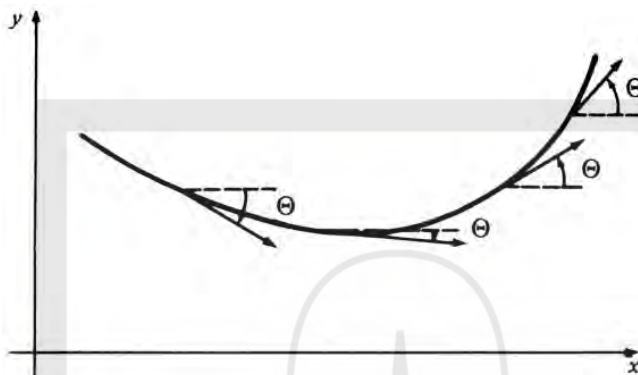


Figura 1.2

En los dos primeros puntos θ es negativo, $\tan \theta$ empieza por ser negativa, crece al aumentar la x , pasa por cero y sigue creciendo; como $f'(x)$ va creciendo, la curva se hace más "parada". Se dice que la curva es cóncava hacia arriba o bien que es convexa.

Del mismo modo si $f''(x)$ es negativa en cierto intervalo, la pendiente de la tangente va decreciendo al aumentar la x y la curva es cóncava hacia abajo o simplemente cóncava (figura 1.3).

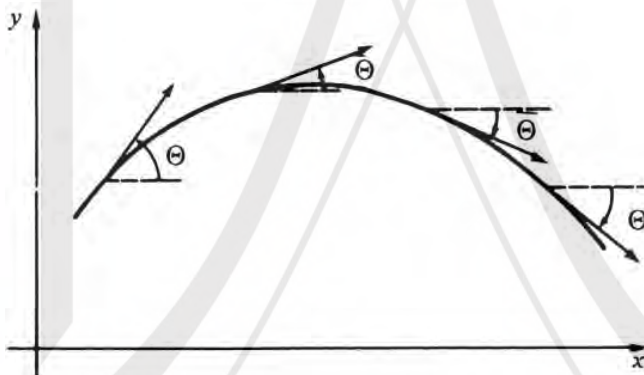


Figura 1.3

Notemos que si la curva es convexa, la cuerda entre dos puntos de la gráfica está por arriba de la gráfica y la recta tangente a la gráfica en cualquier punto está abajo de la gráfica (figura 1.4).

Se puede probar rigurosamente que son equivalente estas tres propiedades:

1. f' es creciente.

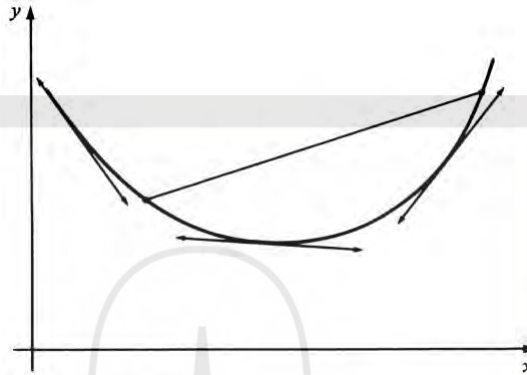


Figura 1.4

2. Las cuerdas quedan por encima de la gráfica.
3. Las tangentes quedan abajo de la gráfica.

Invitamos al lector a convencerse de ello haciendo unos dibujos y tratar de probarlo.

Del mismo modo, en una gráfica cóncava, las cuerdas están abajo de la gráfica y las tangentes arriba (figura 1.5).

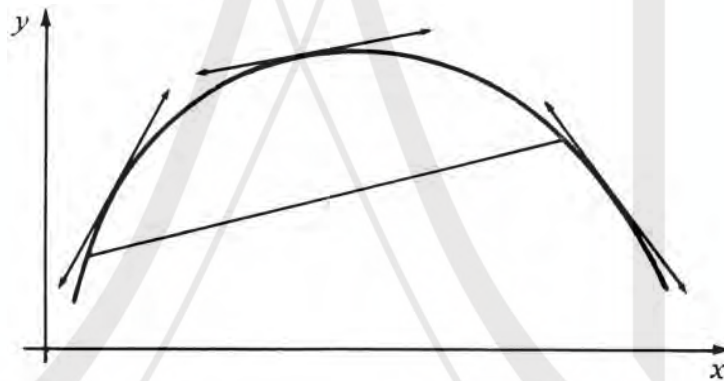


Figura 1.5

Notemos finalmente que la concavidad no tiene que ver con el crecimiento de una función (figura 1.6).

Ejemplo 1.1 Grafiquemos $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) : f'(x) > 0 \text{ si } x < -2 \text{ o si } x > 0.$$

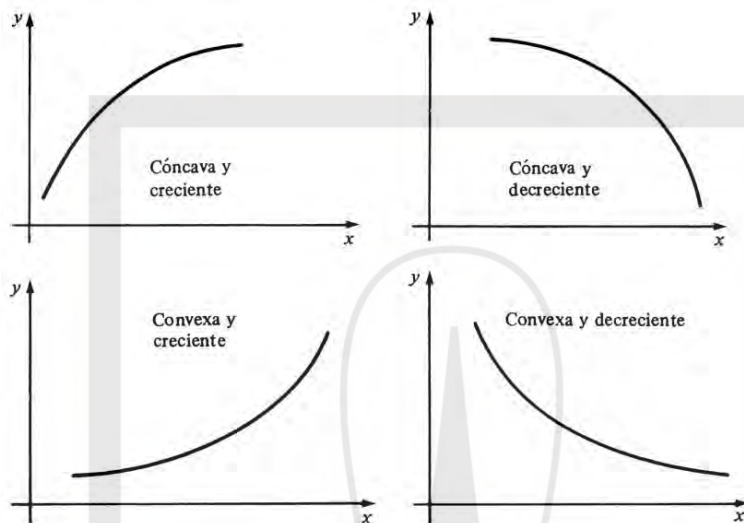


Figura 1.6

$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$; $f''(x) > 0$ si $x > -1$: f es convexa; $f''(x) < 0$ si $x < -1$: f es cóncava.

Sinteticemos, como en el fascículo III, esta información:

x	$-\infty$		- 2		- 1		0		∞
$f''(x)$	$-\infty$	-	- 6	-	0	+	6	+	∞
$f'(x)$	∞	+	0	-	- 3	-	0	+	∞
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	5	\searrow	3	\searrow	1	\nearrow	∞
		Cónica		Cónica		Convexa		Convexa	

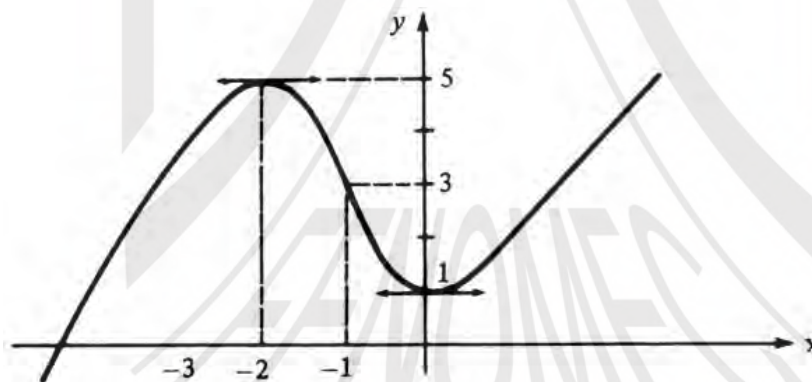


Figura 1.7

Vemos que en el punto $(-1, 3)$, la gráfica pasa de cóncava a convexa.
Un punto donde cambia la concavidad se llama *un punto de inflexión*:

En un punto de inflexión c :

- 1) $f''(c) = 0$, ya que $f''(x)$ pasa de positiva a negativa o de negativa a positiva.
- 2) En un punto de inflexión la tangente cruza la curva ya que la tangente pasa de arriba de la curva a estar por abajo o al revés.

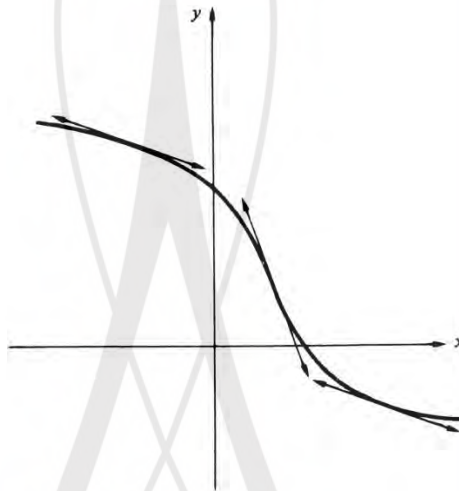


Figura 1.8

Ejemplo 1.2.

Estudiamos la gráfica de $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x + 3)$. En $x = -\frac{3}{2}$, $f'(x)$ cambia de signo, pasando de negativo a positivo y hay un mínimo, con $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{11}{16}$.

Podríamos pensar que f se ve como en la figura 1.9.

Pero si calculamos $f''(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1)$, tenemos:

$f''(x) = 0$ en $x = -1$ y en $x = 0$.

$f''(x) > 0$ si: $x < -1$; f es convexa.

$f''(x) < 0$ si: $-1 < x < 0$; f es cóncava.

$f''(x) > 0$ si: $x > 0$; f es convexa.

$x = 0$ y $x = -1$ son puntos de inflexión.

Notemos que en $x = 0$ tenemos una tangente horizontal pero no un extremo, ya que f es creciente.

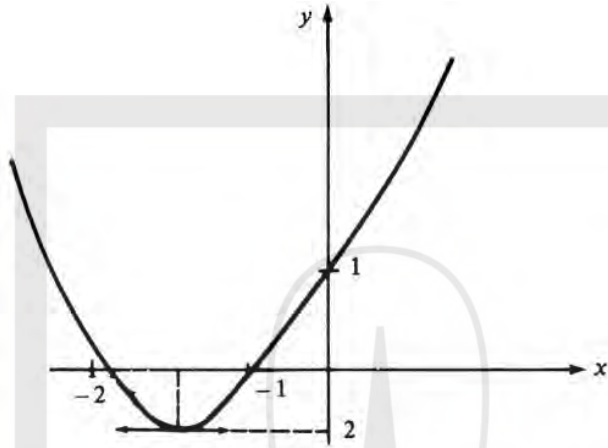


Figura 1.9

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		0		∞
$f''(x)$	∞	$+$	9	$+$	0	$-$	0	$+$	∞
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$+$	∞
$f(x)$	$-\infty$	\searrow	$-\frac{11}{16}$	\nearrow	0	\nearrow	1	\nearrow	∞
		Convexa		Convexa		Cóncava		Convexa	

Entonces la figura correcta es la que se muestra en la figura 1.10.

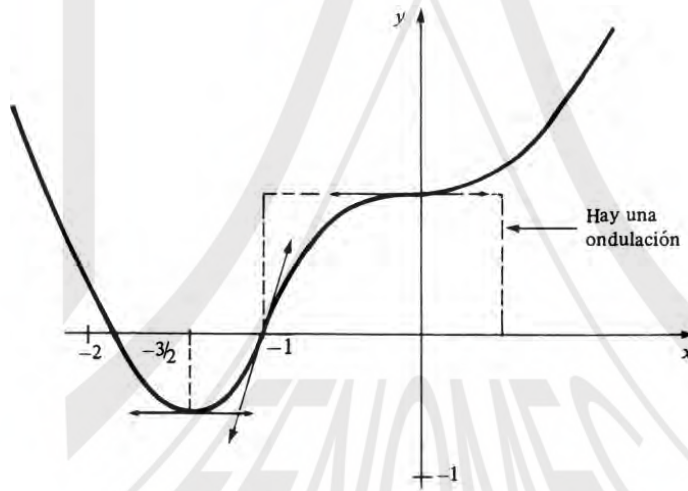


Figura 1.10

Figura 1.1: Gráfica de $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

Ejemplo 1.3.

Estudiamos la gráfica de $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{(x+1)^{1/3}}{(x-1)^{2/3}} - \frac{(x-1)^{1/3}}{(x+1)^{2/3}}\right)}{(x+1)^{2/3}} = \frac{1}{3} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)^{2/3}(x+1)^{4/3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-1)^{2/3}(x+1)^{4/3}} > 0$$

Estudiamos el comportamiento de $f(x)$ en $x = 1$:

$f'(x)$ se hace infinita en $x = 1$: hay un punto de tangencia vertical. Además, $f(1) = 0$.

Estudiamos ahora la función cuando $|x|$ es grande:

$$f(x) = \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^{1/3} ;$$

si x tiende a $\pm\infty$, $\frac{1}{x}$ tiende a 0 por lo tanto $f(x)$ tiende a 1.

También veamos qué es lo que pasa cerca de -1 . Si x tiende a -1 ,

$$f(x) = \left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)^{1/3} = \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{1/3} :$$

Para $x+1 < 0$, $-\frac{2}{x+1}$ es positivo y tiende a $+\infty$: $f(x)$ tiende a $+\infty$ si x tiende a -1 con $x+1 < 0$. Del mismo modo, $f(x)$ tiende a $-\infty$ si x tiende a -1 con $x+1 > 0$.

Finalmente:

$$f'' = \frac{-2}{3} \left(\frac{2}{3}(x-1)^{-5/3}(x+1)^{4/3} + \frac{4}{3}(x+1)^{-7/3}(x-1)^{-2/3} \right)$$

$$= \frac{-4}{9}(x-1)^{-5/3}(x+1)^{-7/3}(3x-1)$$

Entonces, teniendo cuidado del hecho que $3x-1$ cambia de signo en $\frac{1}{3}$, $(x-1)^{5/3}$ en $x=1$ y $(x+1)^{-7/3}$ en $x=-1$ obtenemos:

x	$-\infty$		-1		$1/3$		1		∞
$f''(x)$	0	+	$+\infty$	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$	$-\infty$ - 0
$f'(x)$	0	+	$+\infty$	$+\infty$	+	$\frac{3}{8}2^{1/3}$	+	$+\infty$	$+\infty$ + 0
$f(x)$	1	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	$-2^{-1/3}$	\nearrow	0	\nearrow 1
		Conv			Cónc		Conv		Cónc

En $x = \frac{1}{3}$, hay un punto de inflexión, y también en $x = 1$, aunque ahí la segunda derivada no esté definida.

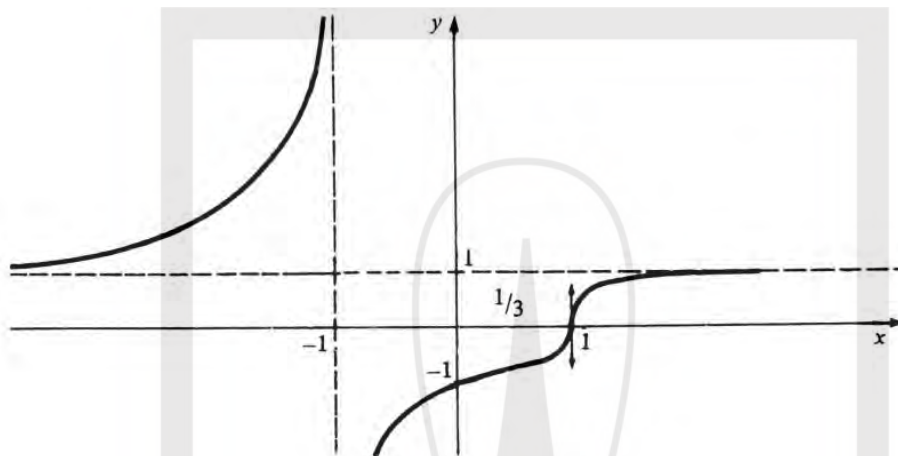


Figura 1.11 Gráfica de $f(x) = \frac{(x-1)^{1/3}}{x+1}$

Ejercicios:

Grafique, incluyendo la concavidad, las funciones siguientes (véase el fascículo III):

1.5 a) $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

b) $\frac{1}{x} - x$

1.6 a) $\sqrt{25 - x^2}$

b) $\sqrt{x^2 + 4}$

1.7 a) $\frac{x}{(x+1)^2}$

b) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

1.8 a) $\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

b) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.9 a) $x^{5/3} - x$

b) $(x-1)^2 x^{1/3}$

c) $x^2 + \frac{2}{x}$

d) $\frac{1}{1+x^2}$

1.10 a) $27x^3 + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2x+1}{x+5}$

c) $(x^2 + x + 1)^{1/3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1.11 a) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$

b) $(x-1)^{1/3} + (x+1)^{1/3}$

c) $\sqrt{x^2 - 1}$

d) $\sqrt{1-x^2}$

Como en el fascículo III, invitamos al lector a que estudie con cuidado tanto los ejemplos como los ejercicios. De esta manera se dará cuenta de las propiedades importantes de cada gráfica y se acostumbrará a buscar la información relevante en cada caso particular, ya que no se puede usar un recetario rígido e uniforme para todos los problemas.

Ejemplo 1.4.

A partir de la gráfica de $f'(x)$, podemos tener una idea de la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, de la figura 1.12 obtenemos la tabla:

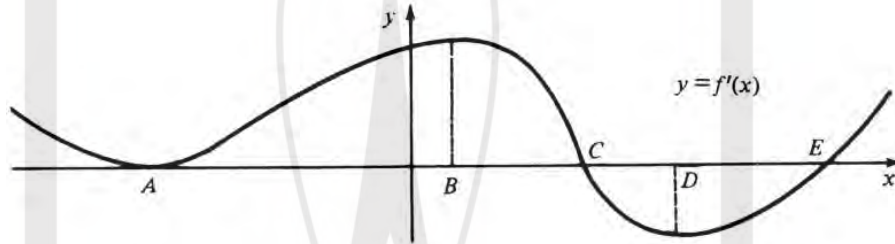


Figura 1.12

x	$-\infty$	A	B	C	D	E	∞
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+	+	0	-	0
$f(x)$	Cónc ↗	Conv ↗	Cónc ↗	Cónc ↘	Conv ↘	Conv ↘	

En A : Inflexión con tangente horizontal

En B : Inflexión

En C : Máximo

En D : Inflexión

En E : Mínimo

Concluimos entonces que $f(x)$ debe verse como muestra la figura 1.13.

Ejercicios:

Haga el mismo estudio para las gráficas siguientes:

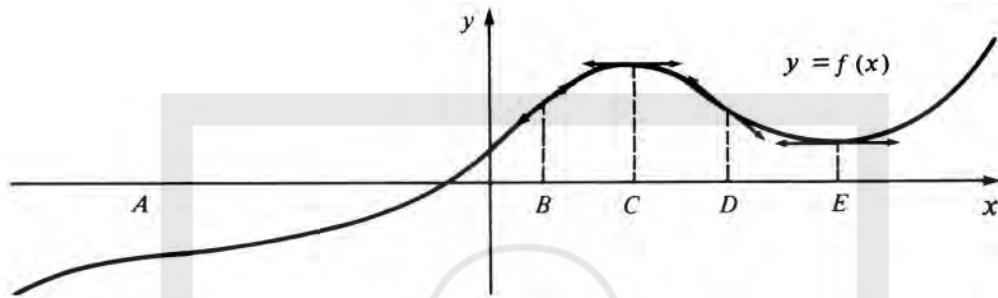
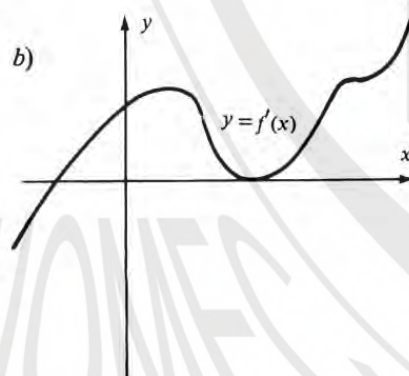
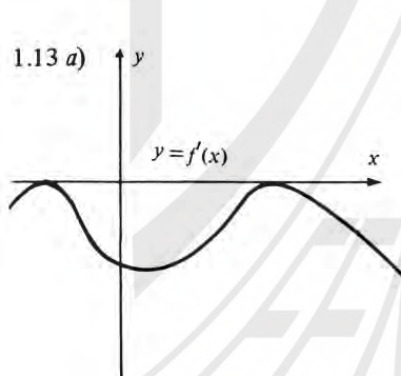
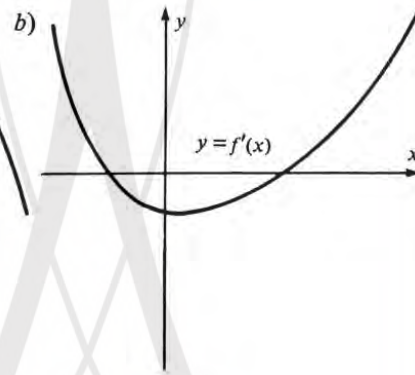
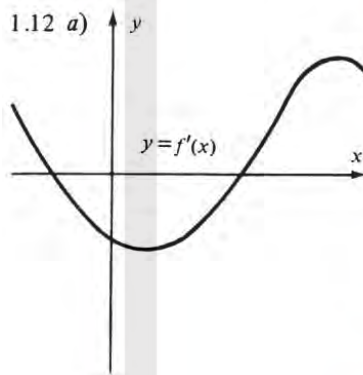


Figura 1.13



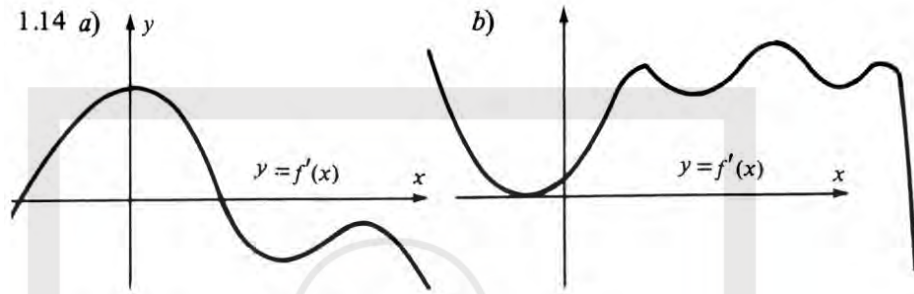


Figura 1.14

1.2 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Hemos visto en el fascículo III de cálculo que si $y = f(x)$ tiene una inversa, $f^{-1}(x)$: entonces, $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Esto implica que si $f(x)$ es creciente, también lo es $f^{-1}(x)$, ya que sus derivadas tienen el mismo signo.

¿Qué se puede decir de la concavidad de $f^{-1}(x)$?

$$(f^{-1}(x))'' = -\frac{\frac{d}{dx}(f'(f^{-1}(x)))}{f'(f^{-1}(x))^2} = -\frac{f''(f^{-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{-1}(x)}{f'(f^{-1}(x))^2}$$

$$(f^{-1}(x))'' = \frac{-f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))^3}$$

Por lo tanto si $f(x)$ es creciente y convexa, $f^{-1}(x)$ es cóncava, ya que f' y f'' son positivas, pero si $f(x)$ es decreciente y convexa, $f^{-1}(x)$ es convexa.

Hay una *manera geométrica* de darse cuenta de esto: ¿Qué es encontrar la función inversa de $y = f(x)$? Es expresar x en función de y : $x = g(y)$ y estudiar la función $y = g(x)$.

Entonces los puntos de la gráfica de $f(x)$ que son los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$ son los mismos puntos que satisfacen $x = g(y) = f^{-1}(y)$ (figura 1.15).

Ahora, si queremos graficar $y = f^{-1}(x)$, debemos intercambiar x y y , ya que si (a, b) pertenece a la gráfica de $f(x)$, es decir $f(a) = b$, entonces $a = g(b)$ o sea (b, a) pertenece a la gráfica de $g(x)$.

Pedimos al lector que dibuje sobre un papel cuadriculado una gráfica parecida a la gráfica de la figura 1.15, que tome varios puntos (a, b) sobre esa gráfica y que al conectar los puntos (b, a) de la gráfica de la inversa, se dé cuenta que la

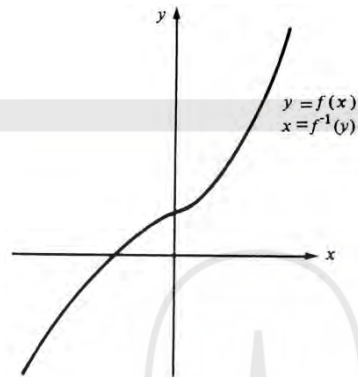


Figura 1.15

gráfica de $f^{-1}(x)$ es la *curva simétrica* de $y = f(x)$ con respecto a la diagonal $y = x$ (figura 1.16).

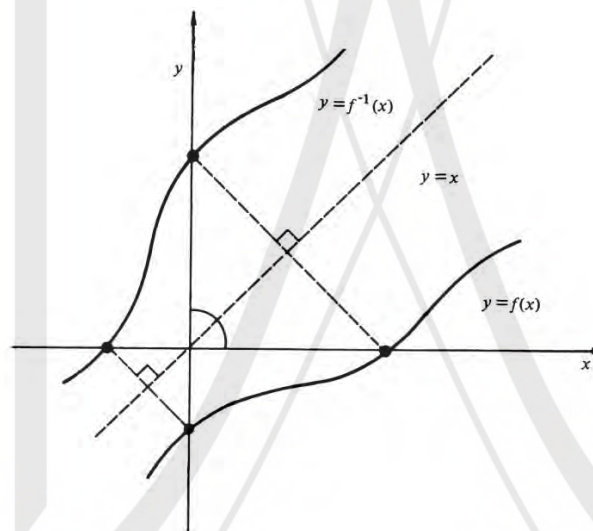


Figura 1.16

Ejercicio 1.15.

Grafique de esta forma las funciones $y = x^3$, $y = e^x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ y sus inversas.

Ahora bien, debido a la simetría de las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, vemos que las *tangentes* en dos *puntos simétricos* deben ser *simétricas* con respecto a la

diagonal.

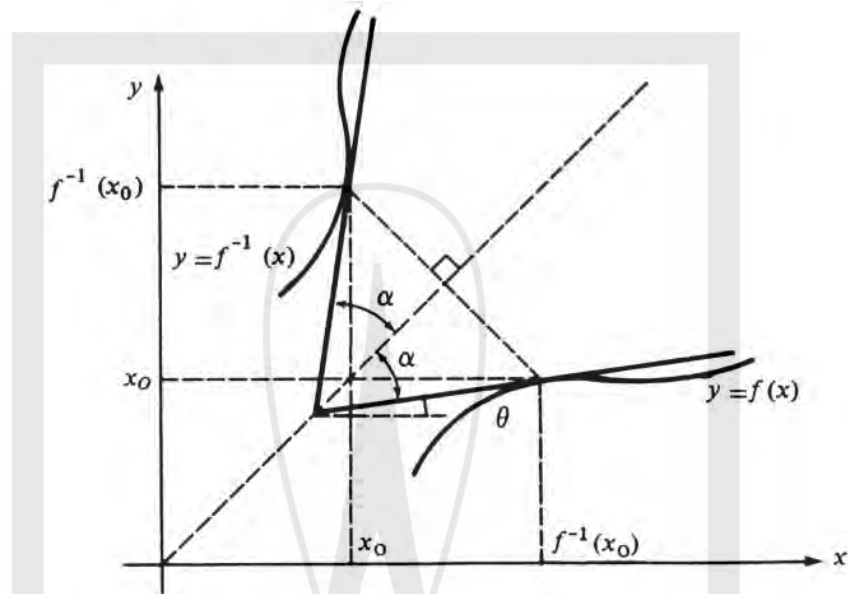


Figura 1.17

Podemos probar esto analíticamente: Sabemos que

$$\begin{aligned}(f^{-1}(x_0))' &= \tan(\theta + 2\alpha) \\ f'(f^{-1}(x_0)) &= \tan \theta\end{aligned}$$

Pero como $\theta + \alpha = \frac{\pi}{4}$,

$$\tan(\theta + 2\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Es decir,

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

confirmando el resultado que obtuvimos con la regla de la cadena.

Para saber si una función $f(x)$ tiene inversa, necesitamos probar que para cada y hay una x y sólo una x , tal que $y = f(x)$. Para muchas funciones esto no sucede, pero puede ser importante *definir una inversa sobre un intervalo solamente*. Por ejemplo, e^x es la inversa de $\ln x$ para x positivo, \sqrt{x} es la inversa de x^2 para x positivo.

La función

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{x} = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1+x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tiene derivada $-\frac{1}{x^2}$ y gráfica tal como se muestra en la figura 1.18.

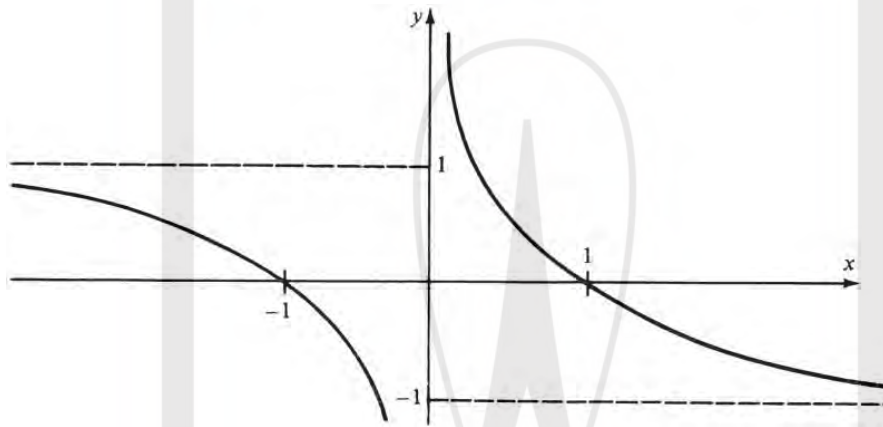


Figura 1.18

$f(x)$ no tiene inversa ya que para y entre -1 y 1 hay dos valores de x tales que $y = f(x)$. Pero si consideramos solamente los valores positivos de x , entonces $y = \frac{1}{x} - 1$ y por lo tanto $x = \frac{1}{1+y}$. La inversa será: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$, definida para $x > -1$. Asimismo, si consideramos solamente los valores negativos de x , $y = \frac{1}{x} + 1$ y $x = \frac{1}{y-1}$. La inversa será $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, definida para $x < 1$.

Ejercicios:

- 1.16 Sea $f(x) = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$. Grafique esta función, ¿En qué intervalos tiene inversa? Calcule la derivada de $f^{-1}(x)$.
- 1.17 Mismas preguntas con $h(x) = \frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x)(1+x)}$.
- 1.18 Mismas preguntas con $g(x) = x + |x|$.

Dos ejemplos importantes son las funciones arco-seno y arcotangente. La función $y = \sin x$ no tiene inversa global, ya que $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ donde k es cualquier entero.

Pero si nos restringimos al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin x$ es creciente y tiene una inversa llamada arco-seno x , que da en radianes el ángulo cuyo seno es x (figura 1.19).

Usando la fórmula para la derivada de la inversa, tenemos:

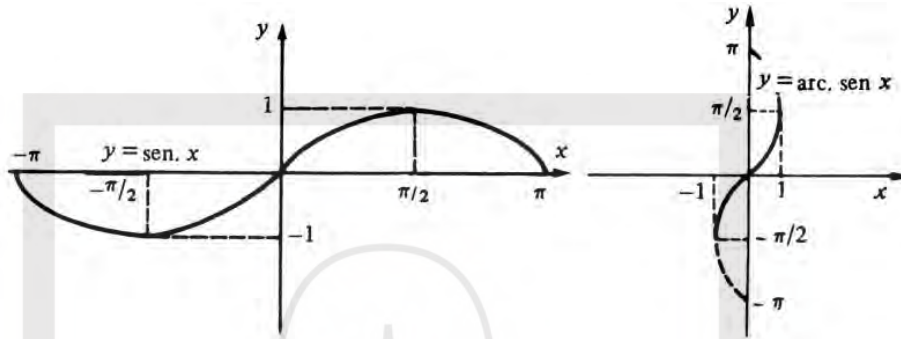


Figura 1.19

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\text{arc sen } x) &= \left. \frac{\frac{1}{d \text{ sen } y}}{dy} \right|_y = \text{arcsen } x \\ &= \left. \frac{1}{\cos y} \right|_{\text{arcsen } x} = \left. \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} \right|_y = \text{arcsen } x \end{aligned}$$

$$\boxed{(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

ya que $\text{sen} (\text{arcsen } x) = x$.

Ejercicio 1.19

Encuentre la inversa de $\cos x$ para x entre 0 y π y pruebe que su derivada es: $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Esta función se llama arcocoseno y se escribe: $\text{arccos } x$.

Del mismo modo, si nos restringimos al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sabemos que la función $\tan x$ tiene la gráfica que muestra la figura 1.20.

Tendremos entonces la función inversa, $\text{arctan } x$ midiendo en radianes el ángulo cuya tangente vale x . Esta función se llama arco tangente y su gráfica se muestra en la figura 1.21.

Su derivada será:

$$\frac{d(\text{arctan } x)}{dx} = \left. \frac{\frac{1}{d(\tan y)}}{dy} \right|_{y=\text{arctan } x} = \left. \frac{1}{1 + \tan^2 y} \right|_{y=\text{arctan } x}$$

y como $\tan (\text{arctan } x) = x$:

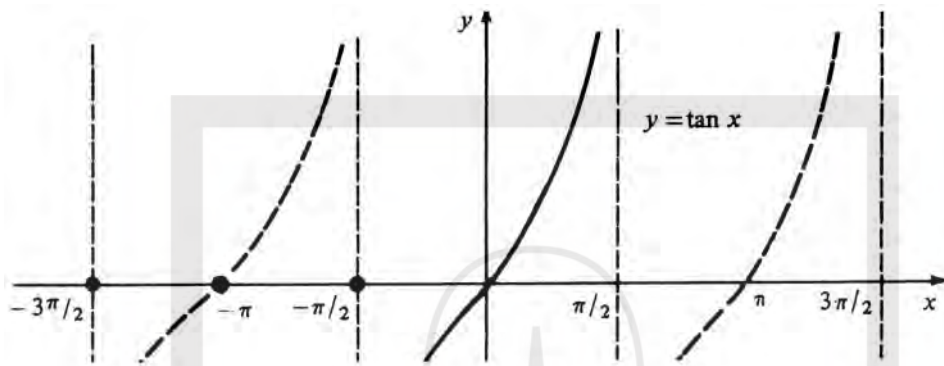


Figura 1.20

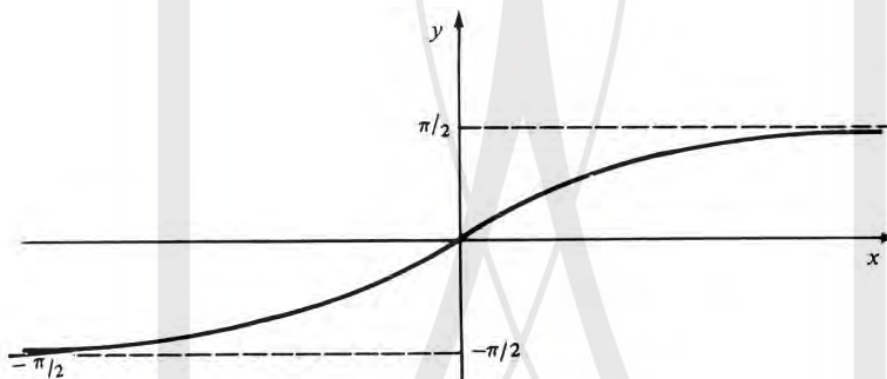


Figura 1.21

$$(\text{Arctan}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Usaremos más adelante estas dos funciones principalmente como primitivas de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\frac{1}{1+x^2}$ respectivamente.

Ejercicios:

1.20 Grafique la inversa de $\cot x$ entre 0 y π ; pruebe que su derivada es $\frac{-1}{1+x^2}$.
(Esta función se escribe $\text{arccot } x$ y se llama arcocotangente).

1.21 Calcule $\arcsen 1$, $\arcsen \frac{1}{2}$, $\arctan 1$, $\arctan (-1)$.

1.22 Calcule las derivadas de

a) $\arcsen(x^2)$

b) $\arctan \sqrt{x}$

c) $(\arcsen x)^2$

d) $\arctan \frac{1}{x}$

e) $\text{Ln}(\arcsen x)$

f) $\frac{\arcsen x}{\arccos x}$

g) $\arcsen \frac{x}{x+1}$

1.23 Calcule la derivada de: $\arcsen x + \arccos x$. ¿Qué se puede decir de esa función? Grafique las dos funciones y su suma.

1.24 Conteste las mismas preguntas para $\arctan x + \text{arccot } x$.

1.25 Calcule la derivada de $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ y grafique la función resultante.

1.3 DETERMINACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Consideremos un punto c tal que $f'(c) = 0$. Sabemos que para determinar si c corresponde a un máximo o a un mínimo, necesitamos estudiar el signo de $f'(x)$ para x cerca de c . Es a veces más fácil calcular $f''(c)$. De hecho hay tres posibilidades:

$$f''(c) > 0, \quad f''(c) < 0, \quad f''(c) = 0$$

Si $f''(c) > 0$, la gráfica es convexa acerca de c (figura 1.22).

Tenemos entonces un mínimo local.

Si $f''(c) < 0$, la gráfica es cóncava cerca de c (figura 1.23).

Tenemos entonces un máximo local.

Si $f''(c) = 0$ no podemos decir nada, ya que en los siguientes ejemplos tenemos $f'(0) = f''(0) = 0$ y un comportamiento diferente en cada uno (figura 1.24).

En resumen el “criterio de la segunda derivada” dice:

$$f'(c) = 0 \text{ y } f''(c) > 0 : \text{mínimo local}$$

$$f'(c) = 0 \text{ y } f''(c) < 0 : \text{máximo local.}$$

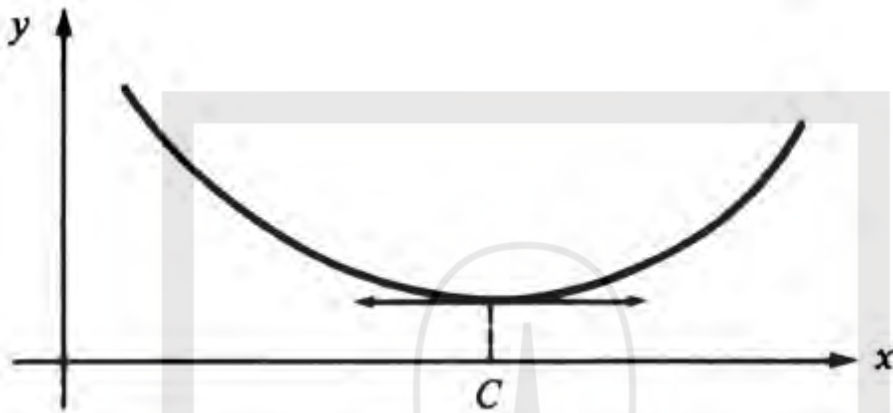


Figura 1.22

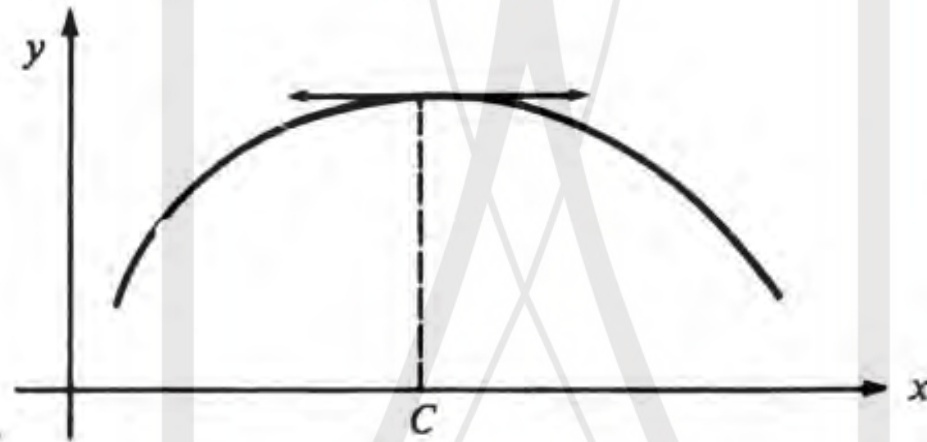


Figura 1.23

El decidir cuándo aplicarlo en lugar de estudiar $f'(x)$ depende únicamente de la experiencia. Recordemos que este criterio puede fallar cuando $f''(c) = 0$.

Ejemplo 1.5.

Consideremos el triángulo rectángulo ABC del dibujo. ¿Cuál es el rectángulo de mayor área contenido en el triángulo de la figura 1.25?

Como ABC y EDC son semejantes: $\frac{y}{3} = \frac{4-x}{4} = 1 - \frac{x}{4}$. El área del rectángulo será: $xy = A(x) = 3x \left(1 - \frac{x}{4}\right)$. Entonces, $A'(x) = 3 - \frac{3x}{2}$ y $A''(x) = -\frac{3}{2} < 0$.

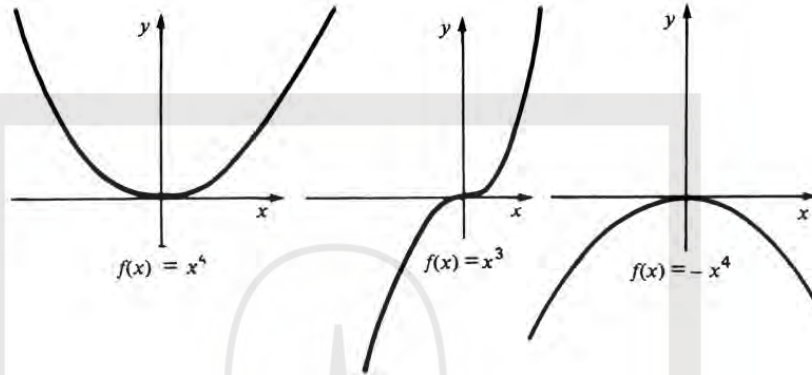


Figura 1.24

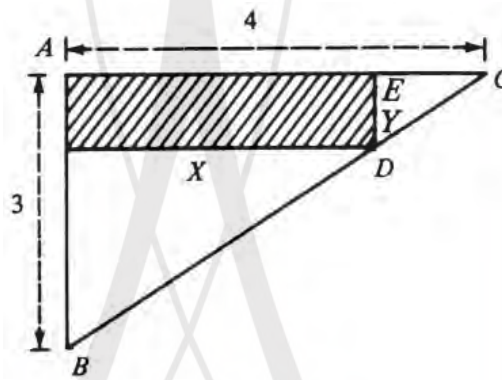


Figura 1.25

Por lo tanto, en $x = 2$ tenemos un máximo. Como x varía entre 0 y 4 y $A(0) = A(4) = 0$ ésta es la respuesta.

Problema 1.6.

Una ventana de 5 m^2 tiene la forma de un rectángulo más un semicírculo, como se muestra en la figura 1.26. Encuentre las dimensiones del rectángulo minimizando el perímetro del rectángulo más el semi-círculo: $2x + 2y + \frac{\pi y}{2}$.

Expresé x en función de y y use el criterio de la segunda derivada.

$$\left(\text{Respuesta: } y = 2\sqrt{\frac{10}{\pi+8}}, x = \frac{20}{\sqrt{10\pi+80}} \right)$$

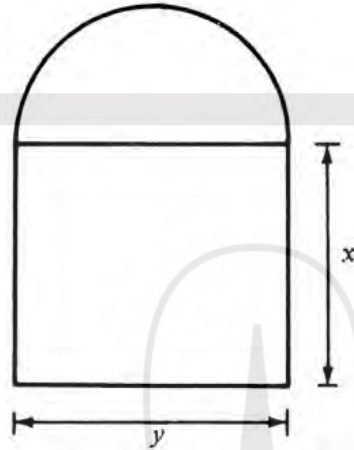


Figura 1.26

Problema 1.7.

Una caja de madera, de fondo cuadrado, debe contener $\frac{2}{3} \text{ m}^3$. Los costados y la tapa son de caoba y el fondo de pino. Si la caoba cuesta tres veces más que el pino, ¿cuáles son las dimensiones de la caja de menor costo? (Respuesta: base: 1 m, altura $\frac{2}{3} \text{ m}$). Use el criterio de la segunda derivada.

Problema 1.8.

Dos coches circulan a una velocidad constante hacia el entronque de dos carreteras perpendiculares. El primero va a 80 km/h y en el instante inicial está a 4 km de la intersección, mientras que el segundo viajando a 100 km/h está a 5 km de ella. ¿En qué momento su distancia será mínima y a qué distancia estarán? (Véase la figura 1.27.)

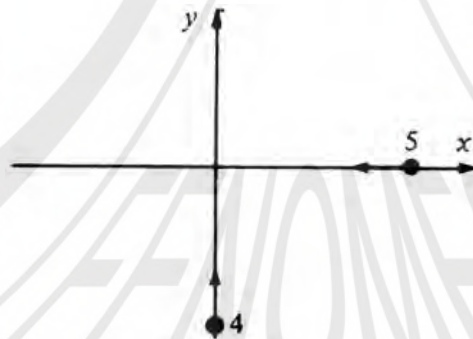


Figura 1.27

(Pruebe que la posición del primer coche obedece la ecuación: $x = 0$, $y = 80t - 4$ y la del segundo: $y = 0$, $x = 5 - 100t$. Respuesta: $t = 3$ minutos y hay choque).

Problema 1.9.

Una compañía empañadora hace latas cilíndricas de aluminio de dos litros. El costado está hecho de un rectángulo doblado y las tapas de dos círculos recortados de dos cuadrados (figura 1.28).

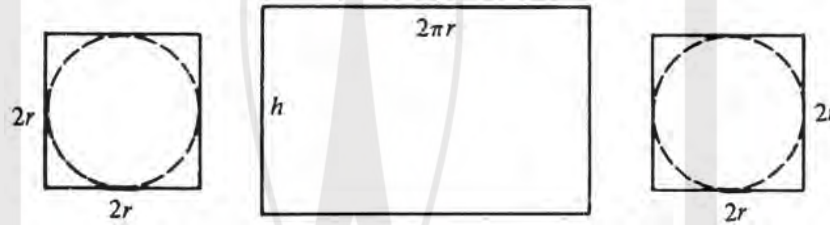


Figura 1.28

¿Cuáles son las dimensiones de la lata que usa menos aluminio? (Se recuerda que el volumen del cilindro es $\pi r^2 h$. Expresé h en función de r . Respuesta: $r = 10$ cm, $h = \frac{2}{\pi} \cong 6.4$ cm).

Problema 1.10.

Al medir una cierta cantidad física x , el científico hace muchos experimentos, digamos n , obteniendo los resultados aproximados x_1, \dots, x_n . Después escoge el valor x que minimiza la cantidad:

$$d(x) = (x - x_1)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

(Método de los mínimos cuadrados).

¿Cuál es x ? (Respuesta: $x = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ la media de los experimentos).

Ejemplo 1.11.

Se quiere hacer una caja de madera dividida en 12 compartimentos de base cuadrada, distribuidos como en la figura 1.29. La caja debe contener 1 m^3 . ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para usar menos madera? (La caja tiene fondo y tapa).

Tenemos: $x = 4z$, $y = 3z$

- El volumen es: $xyh = 1$

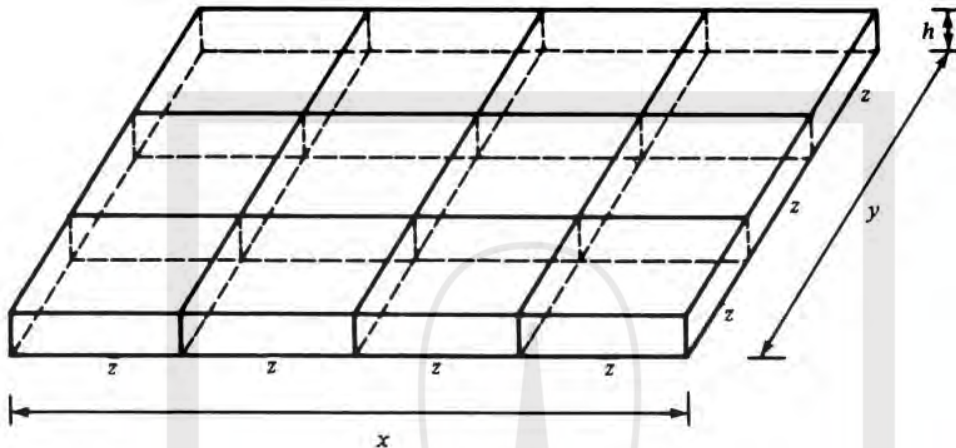


Figura 1.29

- Entonces: $y = \frac{3}{4}x$ y $h = \frac{1}{xy} = \frac{4}{3x^2}$

La superficie de madera empleada corresponde a:

- Fondo y tapa: $2xy = \frac{3}{2}x^2$
- Costados y separaciones: $5yh + 4xh = \frac{4}{3x^2} \left(\frac{15}{4}x + 4x \right) = \frac{5}{x} + \frac{16}{3x}$
- Superficie total $S(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{31}{3x}$, x es positivo.
- $S'(x) = 3x - \frac{31}{3x^2}$
- $S''(x) = 3 + \frac{62}{3x^3}$

Como $S'(x) = 0$ en $x = (31/9)^{1/3} \simeq 1.51\text{m}$ y $S''(x)$ es positiva para x positiva, tenemos el mínimo con $y \simeq 1.13\text{m}$, $h \simeq 0.58\text{m}$.

Problema 1.12.

Resuelva el problema anterior, pero con los 12 compartimentos distribuidos en dos hileras de 6 compartimentos cada una.

1.4 INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN CUADRÁTICA

Si queremos aproximar la gráfica de una función por una curva simple, podemos tomar un cierto número de puntos sobre la gráfica y unirlos por segmentos de recta. Esto se llama hacer una interpolación lineal (figura 1.30):

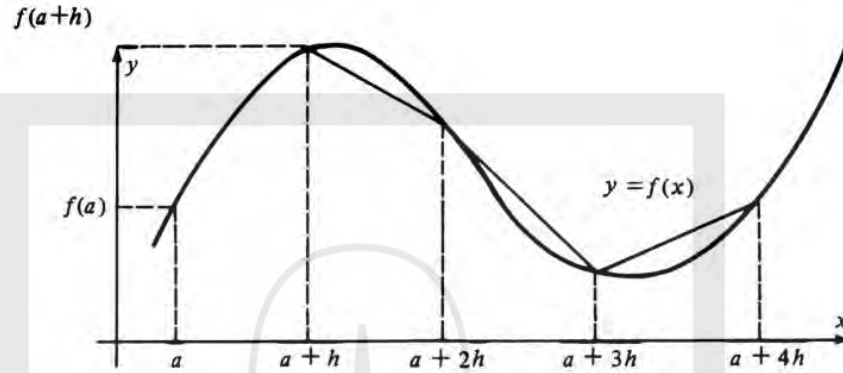


Figura 1.30

El primer segmento tendrá como ecuación:

$$y = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) = f_{A_1}(x)$$

ya que es la ecuación de una recta que pasa por $(a, f(a))$ y de pendiente $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Si consideramos la diferencia entre f y su interpolación lineal:

$$f(x) - f_{A_1}(x) = \phi_1(x),$$

vemos que:

$$\phi_1(a) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_1(a+h) = 0$$

Entonces, para el teorema del valor medio, hay un máximo absoluto de $|\phi_1(x)|$ para x entre a y $a+h$, (figura 1.31), donde la derivada $\phi_1'(x)$ es 0. Si llamamos c a ese punto:

$$\phi_1'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Por lo tanto, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} |\phi_1(x)| \leq |\phi_1(c)| &= |f(c) - f(a) - f'(c)(c - a)| \\ &= |f'(c_1) - f'(c)|(c - a) \leq |f'(c_1)|h + |f'(c)|h \end{aligned}$$

donde c_1 está entre a y c . Obtenemos así una estimación sobre el error cometido en la interpolación lineal, ya que si $|f'(x)|$ está acotada por M entre a y $a+h$:

$$|f(x) - f_{A_1}(x)| \leq 2Mh.$$

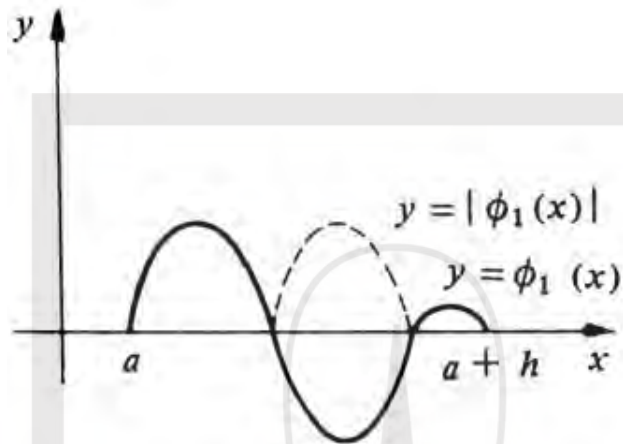


Figura 1.31

Vemos de esta manera que para obtener una buena interpolación, necesitamos tomar h muy pequeña si la función f oscila mucho, es decir, si M es grande. Por ejemplo, en la figura 1.32 queda claro que la interpolación lineal que hemos dibujado no es una buena aproximación de la curva. Tendríamos que tomar h mucho más chico (por ejemplo, como en la línea punteada), con el inconveniente de tener que calcular muchos más valores de la función.

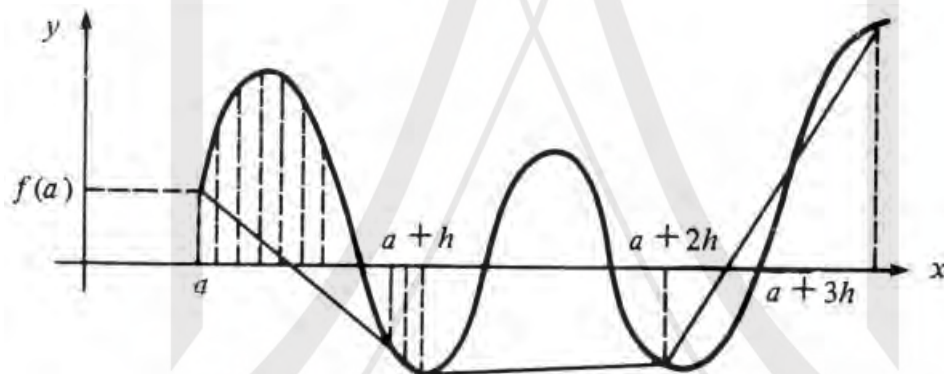


Figura 1.32

Ahora bien, si queremos una mejor interpolación, o ajuste, de la gráfica, podemos tratar de aproximar la gráfica, entre a y $a+h$, por una curva simple que pase por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ y que tenga la misma pendiente que la tangente en a como se muestra en la figura 1.33.

Desde luego esta nueva curva no puede ser una recta, ya que la pendiente de la recta pasando por $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ está completamente determinada

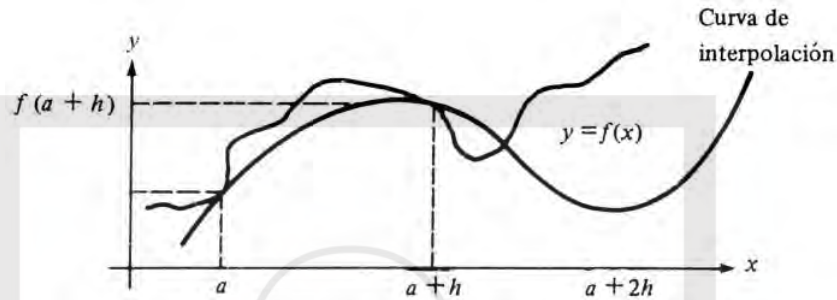


Figura 1.33

por esos datos. Por otra parte, hubiéramos podido pedir que esa nueva curva coincidiera en tres puntos con $f(x)$, sin dar el requerimiento sobre la tangente, o imponer la condición de tangencia en $a+h$. Cada uno de estos planteamientos es válido, y puede ser mejor que el que presentamos, en determinados problemas. Aquí estamos suponiendo, implícitamente, que queremos un mejor “ajuste” en a . Invitamos al lector a adaptar el razonamiento que presentamos a continuación a cada uno de esos planteamientos.

Como la recta queda descartada, probaremos otra cuarcas simple, una parábola de la forma:

$$y = \alpha(x - a)^2 + \beta(x - a) + \gamma = f_{A_2}(x)$$

Deseamos que:

$$\begin{aligned} f_{A_2}(a) &= f(a) \\ f_{A_2}(a+h) &= f(a+h) \\ f'_{A_2}(a) &= f'(a) \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} f_{A_2}(a) &= \gamma = f(a) \\ f'_{A_2}(a) &= \beta = f'(a) \\ f_{A_2}(a+h) &= \alpha h^2 + \beta h + \gamma = f(a+h) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h^2}$$

Después de determinar los coeficientes de la parábola, veamos la diferencia: $\phi_2(x) \equiv f(x) - f_{A_2}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \alpha(x-a)^2$, para darnos una idea del máximo de $|\phi_2(x)|$.

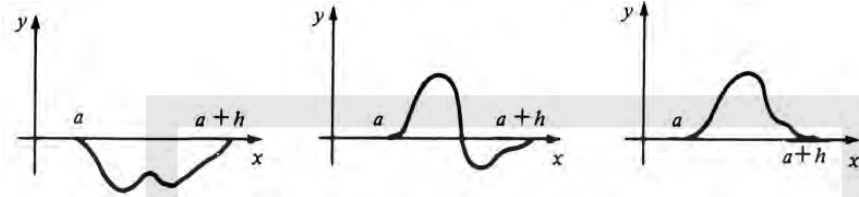


Figura 1.34

Ahora bien, como $\phi_2(a) = 0 = \phi_2(a+h)$, por la construcción de la parábola, $\phi_2(x)$ puede tener alguna de las formas de la figura 1.34.

En cada caso el máximo de $|\phi_2(x)|$ corresponde a un extremo c_1 de $\phi_2(x)$, un punto donde $\phi_2'(c_1) = 0$. Tenemos ahora:

$$\begin{aligned} |\phi_2(x)| &\leq |\phi_2(c_1)| = |f(c_1) - f(a) - f'(a)(c_1 - a) - \alpha(c_1 - a)^2| \\ &\leq |f(c_1) - f(a) - f'(a)(c_1 - a)| + |f(a+h) - f(a) - f'(a)h| \frac{(c_1 - a)^2}{h^2} \end{aligned}$$

Veamos primero que esta interpolación es mejor que la interpolación lineal, es decir, que $\phi_2(x)$ tiende a cero, cuando h tiende a cero, más rápidamente que h .

Notando que $\frac{1}{h} \leq \frac{1}{c_1 - a}$, ya que c_1 está entre a y $a+h$, obtenemos:

$$\frac{|\phi_2(x)|}{h} \leq \left| \frac{f(c_1) - f(a)}{c_1 - a} - f'(a) \right| + \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right|.$$

Usando la definición de la derivada, vemos que cuando h tiende a cero, lo cual implica que $c_1 - a$ tiende a cero, las dos expresiones del lado derecho tienden a cero; es decir $\frac{|\phi_2(x)|}{h}$ tiende a cero con h . Por lo tanto

$\phi_2(x)$ tiende a cero más rápidamente que h .

Ahora bien, en el caso que $f(x)$ tenga una segunda derivada para x entre a y $a+h$, podemos precisar más la manera en que $\phi_2(x)$ tiende a cero con h .

Como $\phi_2'(x) = f'(x) - f'(a) - 2\alpha(x - a)$ vemos que $\phi_2'(a) = 0$ y sabemos que $\phi_2'(c_1) = 0$.

El teorema del valor medio nos dice entonces que hay un punto c entre a y c_1 , tal que:

$$\phi_2''(c) = 0 = f''(c) - 2\alpha$$

Tenemos entonces la relación $2\alpha = f''(c)$ y como c está entre a y $a+h$, podemos escribir, $c = a + \theta h$, con $0 < \theta < 1$. (Notemos que no conocemos c , en consecuencia tampoco θ). Usando el valor de α y recordando que $\phi_2(a+h) = 0$, vemos que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$$

o poniendo $a+h=x$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$$

con $a < c < x$.

Esta *fórmula* se llama del *error* por razones que serán claras más adelante. Si aplicamos esta fórmula al punto c_1 :

$$f(c_1) = f(a) + f'(a)(c_1 - a) + \frac{1}{2}f''(c_2)(c_1 - a)^2 \text{ con } a < c_2 < c_1.$$

Entonces:

$$|\phi_2(x)| \leq |\phi_2(c_1)| = \left| \frac{1}{2}(f''(c_2) - f''(c))(c_1 - a)^2 \right|$$

donde no conocemos c y c_2 , excepto que están entre a y $a+h$, pero si $|f''(x)| \leq M_2$ para x entre a y $a+h$:

$$|\phi_2(x)| \leq M_2 h^2.$$

Por ejemplo, si $h < \frac{1}{100}$ entonces, $|f(x) - f_{A_1}(x)| \leq \frac{2M}{100}$ y $|f(x) - f_{A_2}(x)| \leq \frac{M_2}{10000}$.

Ejercicios:

- 1.26 Se quiere interpolar linealmente la función $y = x^3 + 1$ entre -1 y 1 .
¿Cuánto debe valer h para que el error sea inferior a $\frac{1}{100}$? (Se recomienda calcular el máximo de $|f'(c_1) - f'(c)|$ entre -1 y 1 .)
- 1.27 Misma pregunta con interpolación cuadrática y un error inferior a:
- $\alpha) \frac{1}{100}$ $\beta) \frac{1}{1000}$ $\gamma) \frac{1}{10000}$
- 1.28 Si se quiere usar interpolación cuadrática con $f(x) = x^2 + 1$, Qué se puede decir de $f_{A_2}(x)$?

Justificaremos ahora el nombre de la fórmula del error aplicándola al problema de aproximación. En el fascículo III vimos que podíamos aproximar una función por la tangente en algún punto a :

$$f(x) \sim y_T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(a + h) \sim f(a) + f'(a)h = y_T(a + h) \quad (\text{véase la figura 1.35})$$

Debido a la fórmula del error sabemos que:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a + \theta h)h^2 \text{ con } 0 < \theta < 1.$$

Entonces:

$$f(a + h) - y_T(a + h) = \frac{1}{2}f''(a + \theta h)h^2$$

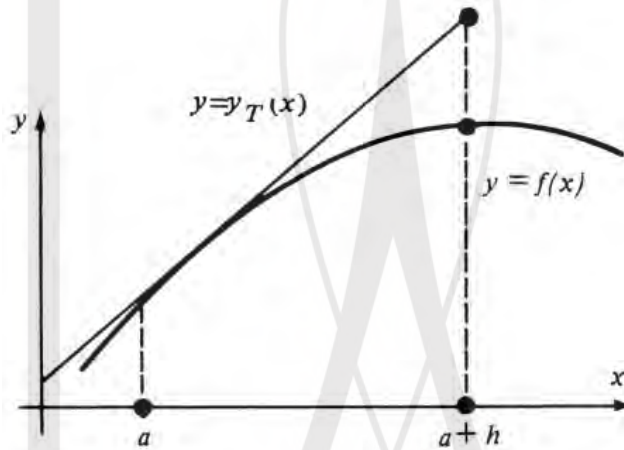


Figura 1.35

Esto nos da una estimación del error que cometemos al aproximar $f(a + h)$ por $y_T(a + h)$, ya que si sabemos que, entre a y $a + h$, $|f''(x)|$ está acotada por M_2 :

$$|f(a + h) - y_T(a + h)| \leq \frac{M_2 h^2}{2}$$

Del mismo modo, si supiéramos que, entre a y $a + h$, $f''(x)$ es de un solo signo, podríamos decir si $f(a + h)$ es mayor o menor que su aproximación $y_T(a + h)$.

Ejemplo 1.13.

Calcule aproximadamente $\sqrt{82}$ y estime el orden del error de la aproximación. $\sqrt{82} = \sqrt{81 + 1}$ está cerca de $\sqrt{81} = 9$.

Sea

$$f(x) = \sqrt{x}; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f''(x) = \frac{-1}{4x^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
 f(82) &= f(81) + f'(81) + \frac{1}{2}f''(81 + \theta) \\
 &= 9 + \frac{1}{18} - \frac{1}{8(81 + \theta)^{3/2}} \\
 \sqrt{82} &\sim 9 + \frac{1}{18} = y_T(82) \cong 9.0555
 \end{aligned}$$

De hecho $\sqrt{82}$ es menor que ese valor, ya que $\frac{-1}{8(81+\theta)^{3/2}}$ es negativo.

Además:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(81 + \theta)^{3/2}} &< \frac{1}{(81)^{3/2}} = \frac{1}{9^3} \\
 \frac{1}{8(81 + \theta)^{3/2}} &\leq \frac{1}{8 \times 9^3} \simeq 0.00017.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 9.0555 - 0.00017 &\leq \sqrt{82} \leq 9.0555 \\
 9.0553 &\leq \sqrt{82} \leq 9.0555
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.14.

Calcule $\tan 44^\circ$ y estime el orden del error.

$$\tan 44^\circ = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \text{ ya que } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Sea $f(x) = \tan x$. Por tanto

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x; f''(x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x)$$

Entonces,

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta\pi}{180}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right)^2.$$

Como

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) = 1 - \frac{\pi}{90} + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta\pi}{180}\right)\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta\pi}{180}\right)\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)^2.$$

La aproximación lineal de $\tan 44^\circ$ será: $1 - \frac{\pi}{90} \simeq 0.96509$. El valor real de $\tan 44^\circ$ será un poco mayor, ya que $\tan x$ es positivo entre 44° y 45° . Además, como $\tan x$ es creciente:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\theta}{180}\right) \leq \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

Entonces

$$1 - \frac{\pi}{90} \leq \tan 44^\circ \leq 1 - \frac{\pi}{90} + 2 \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \simeq 0.96631$$

Se puede decir que $\tan 44^\circ \simeq 0.966$ con una incertidumbre de una unidad sobre el último dígito.

Ejemplo 1.15.

En $\ln(1+h)$. Cálculo aproximado y estimación del error.

$$\text{Sea } f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \ln(1+h) &= \ln 1 + hf'(1) + \frac{h^2}{2} f''(1+\theta h) \\ &= h - \frac{h^2}{2(1+\theta h)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ln(1+h)$ es aproximadamente h y un poco menor que ese valor. Para h positivo: $\frac{1}{1+\theta h} \leq 1$, entonces:

$$0 \leq h - \ln(1+h) \leq \frac{h^2}{2}$$

La diferencia será menor que $\frac{1}{1000}$ si h^2 es menor que $\frac{1}{500}$, o sea para $0 \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{71}} \sim 0.014$.

Ejercicios:

1.29 Usando la fórmula del error, dé estimaciones en magnitud y signo sobre el error que se comete al aproximar linealmente los siguientes valores:

$$a) \sqrt{9.1} \quad b) \frac{1}{2.01} \quad c) \sin 29^\circ = \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \right) \quad d) \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \right)$$

1.30 ¿Qué tan chico debe ser x positivo para tener: $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}$ con un error menor que $\frac{1}{1000}$?

1.31 Misma pregunta para:

$$a) \frac{1}{1-x} \sim 1+x \quad (x > 0) \quad b) e^{-x} \sim 1-x \quad (x > 0)$$

Ejemplo 1.16. Concavidad

En la sección anterior vimos geoméricamente que si en un punto crítico a , tenemos $f''(a) > 0$ entonces $f(x)$ tiene en a un mínimo local. Usando la fórmula del error, esto se puede ver de la manera siguiente:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a+\theta h) \frac{h^2}{2}.$$

Como $f'(a) = 0$, $f(a+h) - f(a) = f''(a+\theta h)\frac{h^2}{2}$.

Si h es pequeño, $a + \theta h$ estando muy cerca de a , $f''(a + \theta h)$ será también positivo. Entonces:

$$f(a+h) - f(a) \geq 0$$

y tendremos efectivamente un mínimo en a .

Del mismo modo si $f''(a) < 0$, $f''(a + \theta h)$ es negativo para h pequeño y $f(a+h) \leq f(a)$, entonces f tiene un máximo en a . Finalmente si $f''(a) = 0$, tendremos que estudiar el signo de $f''(a + \theta h)$ para h pequeño. Si es de un solo signo para h pequeño, tendremos un máximo o mínimo según el caso y, si $f''(a + \theta h)$ cambia de signo, tendremos un cambio de concavidad y por lo tanto un punto de inflexión.

Ejemplo 1.17. Aproximación cuadrática

La fórmula del error: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$ sugiere una segunda aproximación al valor de $f(a+h)$:

$$y_{T_2}(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

Esta se llama *aproximación cuadrática o parabólica*, ya que la función $y_{T_2}(a+h)$ representa una parábola que pasa por el punto $(a, f(a))$ con la misma tangente y segunda derivada en a que la función $f(x)$ (figura 1.36).

Usando la fórmula del error:

$$f(a+h) - y_{T_2}(a+h) = (f''(a+\theta h) - f''(a))\frac{h^2}{2}$$

Entonces si h es pequeño $f''(a+\theta h) - f''(a)$ será pequeño y el factor h^2 dará una mejor aproximación de $f(x)$ que la aproximación lineal, ya que si $h = \frac{1}{100}$ entonces $h^2 = \frac{1}{10000}$.

Por ejemplo, tomando $a = 0$ en las funciones siguientes, tenemos

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ejercicios:

1.32 Pruebe estas dos últimas aproximaciones

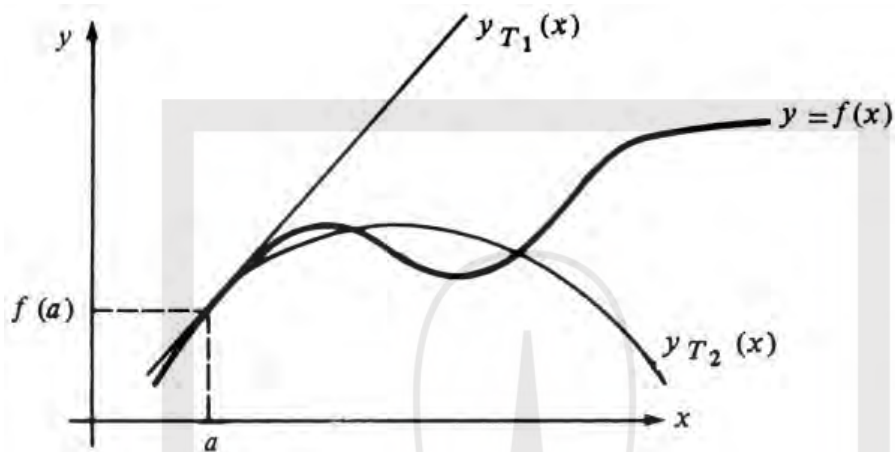


Figura 1.36

1.33 Para x cerca de 0, pruebe que:

- a) $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2$
- b) $(1+x)^{1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$
- c) $(1+x)^{1/3} \sim 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$
- d) $\text{Ln}(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Problema 1.18. Fórmula de Taylor

En este problema se probará que si $f'''(x)$ existe para x entre a y $a+h$, entonces:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f'''(a+\theta h)\frac{h^3}{6} \text{ con } 0 < \theta < 1$$

Tendremos así una fórmula dando el error en el caso de la aproximación cuadrática.

Considere la función:

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - K(x-a)^3,$$

donde se escogerá K tal que $\psi(a+h) = 0$.

- a) Calcule K y compruebe que $\psi(a) = \psi(a+h) = 0$. Por lo tanto, hay un punto c_1 tal que $\psi'(c_1) = 0$ con $a < c_1 < a+h$.
- b) Calcule $\psi'(x)$ y vea que $\psi'(a) = 0$. Pruebe que existe un punto c_2 tal que $\psi''(c_2) = 0$ con $a < c_2 < c_1$.
- c) Calcule $\psi''(x)$ y vea que $\psi''(a) = 0$. Pruebe que existe un $c_3 = a + \theta h$ tal que $\psi'''(c_3) = 0$ con $a < c_3 < c_2$.
- d) Vea que $K = \frac{\psi'''(c_3)}{6}$ y use el hecho de que $\psi(a+h) = 0$, para obtener la fórmula.
- e) Use la función:

$$\begin{aligned} \chi(x) = & f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} - f'''(a)\frac{(x-a)^3}{2 \times 3} \dots \\ & - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n} - k_n(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

siguiendo el procedimiento sugerido para $\psi(x)$, y pruebe la fórmula del matemático inglés Brooks Taylor (1685–1731):

$$\begin{aligned} f(a+h) = & f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} \\ & + f^{(n+1)}(a+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \text{ con } 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

donde $n!$ representa $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$.

Al aproximar $f(a+h)$ por el polinomio $f(a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}$, tendremos entonces, para h pequeño, una mejor aproximación.

Por ejemplo, si tomamos la función $f(x) = e^x$, sabemos que $f'(x) = (e^x)' = e^x$; por lo tanto, $f''(x) = (e^x)' = e^x$ y $f^{(n)}(x) = e^x$. Tomando $a = 0$ en la fórmula de Taylor, como $e^0 = 1$, obtenemos:

$$f(h) = e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots + \frac{h^n}{n!} + e^{\theta h} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nota: El método indicado en este problema se debe a Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Nació en Turín, fue sucesor de Euler en Berlín y a partir de 1786 vivió en París, donde dio clases en L'École Polytechnique y L'École Normale Supérieure, las dos fundadas por Napoleón. Fue uno de los fundadores de la *Mecánica* y es considerado como uno de los más grandes matemáticos del siglo XVIII.

Ejercicios:

<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Use la fórmula de Taylor para obtener:

$$1.34 \quad \text{sen } x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$1.35 \quad \text{cos } x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$1.36 \quad \text{Ln}(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$1.37 \quad \text{tan } x \sim x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$1.38 \quad \frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \dots$$

Ejemplo 1.19. Crecimiento exponencial

Hemos visto en el fascículo III que, cuando x tiende a ∞ , el término dominante en un polinomio es el monomio de más alto grado. En este ejemplo, veremos que la función exponencial e^x crece más rápido que cualquier potencia x^n cuando x va a $+\infty$. De hecho, si usamos la fórmula de Taylor, vemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^{\theta x} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \text{ con } 0 < \theta < 1.$$

Entonces para x positivo, obtenemos:

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Por lo tanto

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$$

y, como

$$\frac{x}{(n+1)!}$$

tiende a ∞ si x tiende a $+\infty$, vemos que

$$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow \infty \text{ si } x \rightarrow \infty.$$

Del mismo modo:

$$x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} \text{ tiende a } 0 \text{ si } x \text{ tiende a } \infty$$

ya que

$$\frac{x^n}{e^x} \leq \frac{(n+1)!}{x}$$

Igualmente: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/n} \ln x = 0$, ya que si ponemos $y = \ln x$ tendremos:
 $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y/n}} = 0$ como se puede verificar usando el mismo argumento.

El logaritmo tiende a ∞ , cuando x tiende a ∞ , menos rápido que una potencia, aún fraccional, de a .

También $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/n} \ln x = 0$ ya que si ponemos $y = \ln x$ tendremos:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (-e^{-y/n} y) = 0.$$

Ejercicios:

Pruebe los siguientes límites:

$$1.39 \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-\alpha x} = 0 \text{ si } \alpha > 0.$$

$$1.40 \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/n} (\ln x)^p = 0 \text{ si } p > 0, n > 0.$$

$$1.41 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = 0 \text{ si } \alpha > 0.$$

$$1.42 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^p}{x^{1/n}} = 0 \text{ si } p > 0, n > 0.$$

Ejemplo 1.20. Regla de L'Hôpital

Para concluir con las aplicaciones del teorema del valor medio, veremos un método muy útil para determinar ciertos límites. Si tenemos el cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $f(a) = 0 = g(a)$, entonces el cociente no está definido en a , pero $\frac{f(x)}{g(x)}$ puede tener un límite cuando x tiende a a . Por ejemplo, como lo vimos en el fascículo II, $\frac{\text{sen } x}{x}$ tiende a 1 si x tiende a 0.

El método que vamos a exponer se debe al marqués Guillaume Francois de L'Hôpital (1661–1704).

Por el teorema del valor medio sabemos que existen c_1 y c_2 entre a y x , tales que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(c_1)(x - a) = f'(c_1)(x - a) \\ g(x) &= g(a) + g'(c_2)(x - a) = g'(c_2)(x - a) \end{aligned}$$

Entonces: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$ y, cuando x tiende a a , c_1 y c_2 tenderán a a . Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, si este cociente existe.

Si este último cociente es de la forma $\frac{0}{0}$, podemos tomar la fórmula del error:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c_3)\frac{(x-a)^2}{2}}{g(a) + g'(a)(x-a) + g''(c_4)\frac{(x-a)^2}{2}} = \frac{f''(c_3)}{g''(c_4)}$$

con c_3 y c_4 entre a y x .

Si x tiende a a , c_3 y c_4 lo harán también y tendremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)},$$

si este cociente no es de la forma $\frac{0}{0}$.

En caso que esto suceda, seguiremos usando términos adicionales en la fórmula de Taylor.

Por ejemplo, $(1 - \cos x)/x^2$ tiene en $x = 0$ la forma $0/0$. El cociente de las derivadas $\text{sen}x/2x$ tiene igualmente esa forma, pero el cociente de las segundas derivadas es $\cos x/2$ y tiene el límite $1/2$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Del mismo modo: $(x - \text{sen}x)/x^3$ tiene la forma $0/0$ en $x = 0$. El cociente de las derivadas es $(1 - \cos x)/3x^2$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Ejercicios:

Calcule los siguientes límites:

$$1.43 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{\tan x}$$

$$1.44 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x - 1}$$

$$1.45 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 3x^2}$$

$$1.46 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\text{sen}x^2}$$

$$1.47 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^2 - 1 - \cos 2x}$$

$$1.48 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos(4x) - 1}$$

$$1.49 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x - \text{sen}x}$$

$$1.50 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$1.51 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \tan x}$$



<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Capítulo 2

CÁLCULO NUMÉRICO

En este capítulo usaremos nuestros conocimientos sobre aproximaciones para, por un lado, calcular numéricamente los ceros de una función con el método de Newton y, por otro lado, para evaluar integrales de funciones. En ambos casos daremos una estimación sobre el error cometido.

2.1 MÉTODO DE NEWTON

Para calcular un cero de una función $f(x)$, es decir encontrar un punto x_0 tal que $f(x_0) = 0$, hay muchos métodos que van desde una gráfica aproximada hasta el uso de una computadora. Muy a menudo es necesario conocer x_0 con buena precisión y, aún en el caso de una computadora, es útil disponer de un procedimiento lógico, un algoritmo, que permita llegar a la solución en un número reducido de pasos.

Supongamos que sabemos que la función $f(x)$ es creciente con derivada positiva y creciente en cierto intervalo $[a, b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; entonces hay un solo punto x_0 entre a y b , tal que $f(x_0) = 0$ (figura 2.1).

Si $f'(b)$ es fácil de calcular, podemos trazar la tangente en b a la curva. Dicha tangente cortará el eje en un punto x_1 más cerca de x_0 que b . Si trazamos la tangente a la curva en $(x_1, f(x_1))$, esta recta cortará el eje en x_2 , todavía más cerca de x_0 . Si repetimos el procedimiento obtendremos una sucesión de puntos, $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$, cada vez más cercanos a x_0 . Esta fue la idea de Newton y veremos que efectivamente el método nos dará el resultado deseado.

Si ya hemos calculado x_n , entonces la ecuación de la tangente a la curva en $(x_n, f(x_n))$ será:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Esta recta corta el eje en x_{n+1} , tal que:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

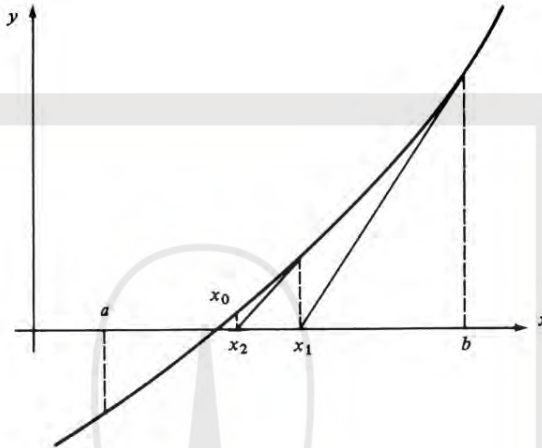


Figura 2.1

Por lo tanto:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejemplo 2.1. Cálculo de $\sqrt{2}$

Si queremos conocer aproximadamente $\sqrt{2}$ podemos convertir este problema en el cálculo del cero de la función (figura 2.2):

$$f(x) = x^2 - 2, \text{ con } f'(x) = 2x$$

Tomando $b = 2$:

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{f(3/2)}{f'(3/2)} = \frac{3}{2} - \frac{9/4 - 2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} \simeq 1.466$$

$$x_3 = \frac{17}{12} - \frac{f(17/12)}{f'(17/12)} = \frac{17}{12} - \frac{(17)^2 - 2(12)^2}{24 \times 17} = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} \simeq 1.414215$$

$$x_4 \simeq 1.414213562$$

$$x_5 \simeq 1.414213561$$

Notemos que

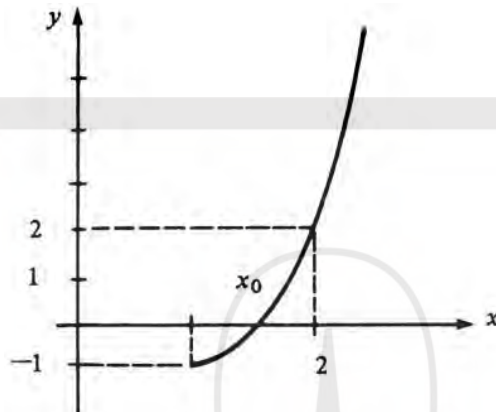


Figura 2.2

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - 2)}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Ahora, si $x_n > \sqrt{2}$, entonces $\frac{2}{x_n} < \sqrt{2}$, x_{n+1} , representando el promedio de un número mayor que $\sqrt{2}$ y de otro menor que $\sqrt{2}$, estará más cerca de $\sqrt{2}$ que x_n .

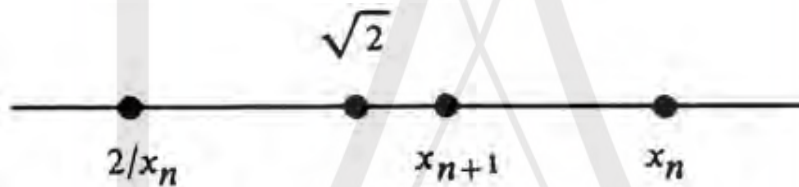


Figura 2.3

Es además, fácil ver que en ese caso $\sqrt{2} \leq x_{n+1}$, ya que:

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \text{ es positivo}$$

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

Entonces, si por ejemplo, $|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{10}$, tendremos:

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{200\sqrt{2}} \leq \frac{1}{280},$$

mejorando mucho la aproximación en cada paso.

Ejemplo 2.2. $\sqrt[3]{2}$

Si queremos encontrar $x_0 = \sqrt[3]{2}$, debemos resolver la ecuación:

$$x_0^3 - 2 = 0$$

Consideremos pues la función $f(x) = x^3 - 2$; $f(1) = -1$; $f(2) = 6$ y como $f'(x) = 3x^2$, $f(x)$ es creciente: x_0 está entre 1 y 2 (figura 2.4).

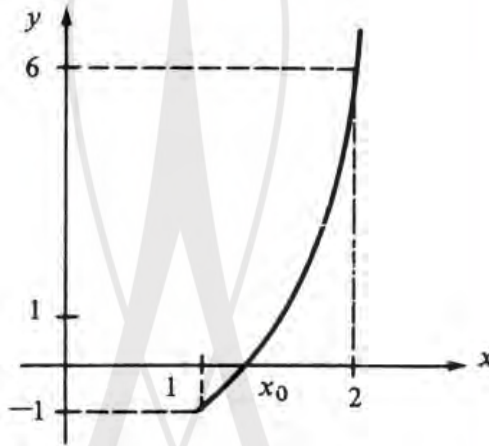


Figura 2.4

Si usamos la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} \left(x_n + \frac{1}{x_n^2} \right).$$

Tomando como primer punto $x = 2$, tendremos:

$$x_1 = \frac{2}{3} \left(2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{9} \right) = \frac{35}{27} \approx 1.296$$

$$x_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{35}{27} + \frac{(27)^2}{(35)^2} \right) \approx 1.2609$$

Con una tabla de logaritmos podríamos encontrar: $\sqrt[3]{2} \simeq 1.25995$, pero podemos también darnos una idea de qué tan cerca estamos de x_0 con las siguientes consideraciones. Sabemos que:

$$x_{n+1} - x_0 = x_n - x_0 - \frac{(f(x_n) - f(x_0))}{f'(x_n)}$$

ya que

$$f(x_0) = 0$$

Ahora bien, la fórmula del error nos dice que:

$$f(x_0) = f(x_n) + f'(x_n)(x_0 - x_n) + f''(c_n) \frac{(x_0 - x_n)^2}{2}$$

con c_n entre x_0 y x_n . Por lo tanto:

$$x_{n+1} - x_0 = x_n - x_0 + \frac{f'(x_n)(x_0 - x_n) + f''(c_n)(x_0 - x_n)^2/2}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - x_0 = \frac{f''(c_n)(x_n - x_0)^2}{f'(x_n) \cdot 2}$$

Aquí

$$x_{n+1} - x_0 = \frac{6c_n}{3x_n^2} \frac{(x_n - x_0)^2}{2} = \frac{c_n}{x_n^2} (x_n - x_0)^2.$$

Entonces, si $x_0 < x_n$ como lo sugiere el dibujo, tendremos:

$$x_0 < c_n < x_n, \quad 0 \leq x_{n+1} - x_0 \leq \frac{1}{x_n} (x_n - x_0)^2 \leq \frac{1}{x_0} (x_n - x_0)^2.$$

Nos quedamos a la derecha de x_0 y más cerca de este valor si

$$x_n - x_0 < 1.$$

Empezando con $x = 2$, tendremos:

$$0 \leq x_1 - x_0 \leq \frac{1}{2} (2 - x_0)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x_2 - x_0 \leq \frac{1}{x_1} (x_1 - x_0)^2 \leq \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

ya que $x_1 = \frac{3}{2}$ y de la primera desigualdad obtenemos

$$(x_1 - x_0)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

$$0 \leq x_3 - x_0 \leq \frac{1}{x_2}(x_2 - x_0)^2 \leq \frac{27}{35} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{4 \times 35} \leq \frac{3}{100}$$

Por lo tanto:

$$x_3 - \frac{3}{100} \leq x_0 \leq x_3,$$

es decir,

$$1.23 \leq x_0 \leq 1.26$$

Al siguiente paso: $0 \leq x_4 - x_0 \leq \frac{1}{x_3}(x_3 - x_0)^2 \leq \frac{1}{1.26} \left(\frac{3}{140}\right)^2 \leq 0.0004$.

Ejercicios:

- 2.1 Use el método de Newton para calcular $\sqrt{3}$ con dos decimales exactos. Para esto se deberá dar una estimación del error hasta llegar a un x_{n+1} con $|x_{n+1} - x_n| \leq 0.001$.
- 2.2 Misma pregunta con $\sqrt[3]{3}$
- 2.3 Mejore los siguientes valores $\sqrt{50} \simeq 7.07$; $\sqrt[5]{5} \simeq 1.54$; dando una estimación del error.

Ejemplo 2.3. Un problema de tina

Se quiere construir una tina de forma cónica, como en la figura 2.5, de base con radio 1 m. y de borde 1 m.

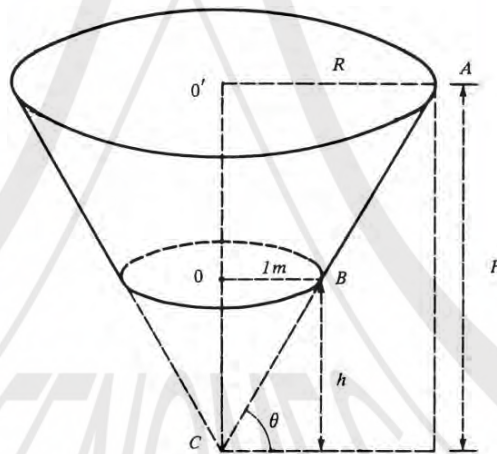


Figura 2.5

¿Cuál es la tina con estas características que contiene mayor cantidad de agua? (Es decir de mayor volumen).

El volumen de la tina será $\frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h$, la diferencia de los volúmenes de los dos conos, con vértice C y altura H para el primero, y h para el segundo.

Como $H = AC \operatorname{sen} \theta = R \tan \theta$, $h = (AC - 1) \operatorname{sen} \theta = \tan \theta$, entonces: $AC - 1 = \frac{1}{\cos \theta}$; $AC = \frac{1}{\cos \theta} + 1$ y $R = AC \cos \theta = 1 + \cos \theta$.

Entonces el volumen será:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}(R^3 \tan \theta - \tan \theta) &= \frac{\pi}{3} \tan \theta (R^3 - 1) \\ &= \frac{\pi}{3} \tan \theta ((\cos \theta + 1)^3 - 1) \\ &= \frac{\pi}{3} \tan \theta (\cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta) \\ V(\theta) &= \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \theta (\cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 3) \end{aligned}$$

Claramente debemos estudiar esta función para θ entre 0 y $\pi/2$.

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi}{3} (\cos \theta (\cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 3) - \operatorname{sen} \theta (2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + 3 \operatorname{sen} \theta))$$

y usando la relación $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, obtenemos:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi}{3} (\cos^3 \theta + 2 \cos^2 \theta + \frac{\cos \theta}{3} - 1).$$

Como $V'(0) = \frac{\pi}{3} \times \frac{7}{3}$, $V'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{3}$, entonces $V'(\theta)$ tiene por lo menos un cero entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Ahora, $V''(\theta) = -\frac{\pi}{3} (3 \cos^2 \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{3})$ es negativo en el intervalo; $V'(\theta)$ es decreciente entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y el cero de $V'(\theta)$ corresponde a un máximo de $V(\theta)$.

Si ponemos $x = \cos \theta$, tenemos que encontrar el cero, entre 0 y 1, de la cúbica:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} - 1$$

con $f(0) = -1$, $f(1) = \frac{7}{3}$, $f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{1}{3}$, $f''(x) = 6x + 4$ ($f(x)$ es creciente entre 0 y 1 ya que los ceros de $f'(x)$ están en $\frac{-2 \pm \sqrt{3}}{3}$, ambos negativos). Ahora,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-5}{24}, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{27}, \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{3}.$$

Entonces, tomando $x_1 = \frac{2}{3}$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{67}{117} \simeq 0.573$$

Además,

$$x_2 - x_0 = \frac{f''(c_1)}{f'(x_1)} \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \quad \text{con } x_0 < c_1 < x_1$$

Como

$$f''(x) = 6x + 4$$

es creciente y positiva,

$$0 \leq x_2 - x_0 \leq \frac{3x_1 + 2}{f'(x_1)} (x_1 - x_0)^2$$

Entonces, como

$$x_1 - x_0 \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$0 \leq x_2 - x_0 \leq \frac{12}{13} \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{39} \leq 0.026$$

Finalmente:

$$f\left(\frac{67}{117}\right) \simeq 0.034526$$

$$f'\left(\frac{67}{117}\right) \simeq 3.6077139$$

Entonces,

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq 0.56308$$

con

$$x_3 - x_0 = \frac{3c_2 + 2}{f'(x_2)} (x_2 - x_0)^2 \quad \text{con } x_0 < c_2 < x_2$$

$$0 \leq x_3 - x_0 \leq \frac{3x_2 + 2}{f'(x_2)} (x_2 - x_0)^2 \leq 0.0008$$

$$0.5622 \leq x_0 \leq 0.5630$$

Si hacemos un paso más, tendremos:

$$x_4 \simeq 0.56298$$

Con $0 \leq x_4 - x_0 \leq 0.000002$

En nuestro problema esto corresponde a un ángulo $\theta \simeq 55^\circ 30'$.

Si queremos comprobar que el algoritmo es efectivamente convergente, vemos que

$$x_{n+1} - x_0 = \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} \frac{(x_n - x_0)^2}{2} = \frac{3c_n + 2}{3x_n^2 + 4x_n + 1/3} (x_n - x_0)^2$$

con $x_0 < c_n < x_n < 2/3$.

Como sabemos que $f''(x)$ y $f'(x)$ son positivos y crecientes para x positivo, vemos que $x_{n+1} - x_0$ es positivo, $f''(c_n) < f''\left(\frac{2}{3}\right) = 4$,

$$f'(x_1) > f'(x_0) > f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{12}, \quad 0 < x_n - x_0 < \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

entonces,

$$0 \leq x_{n+1} - x_0 \leq \frac{8}{37}(x_n - x_0) \leq \frac{x_n - x_0}{4}$$

x_{n+1} está a la derecha de x_0 y por lo menos 4 veces más cerca de x_0 que x_n .

En general, el signo de $\frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$ nos dirá si x_{n+1} está a la derecha o a la izquierda de x_0 ; además, si encontramos que en el intervalo donde están x_0, x_1, \dots, x_n tenemos:

$$|f''(x)| \leq M, \quad |f'(x)| \geq N,$$

entonces,

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{M}{2N}|x_n - x_0|^2 = (K(x_n - x_0))^2$$

para todo n , con $K = \sqrt{M/2N}$

Aplicando esta fórmula para x_n en lugar de x_{n+1} , obtenemos:

$$|x_n - x_0| \leq K^2|x_{n-1} - x_0|^2$$

Entonces,

$$|x_n - x_0|^2 \leq K^4|x_{n-1} - x_0|^4$$

y

$$|x_{n+1} - x_0| \leq K^2 K^4 |x_{n-1} - x_0|^4 \leq K^2 K^4 K^8 |x_{n-2} - x_0|^8$$

$$|x_{n+1} - x_0| \leq K^{2+4+8+\dots+2^n} |x_1 - x_0|^{2^n}$$

Como $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$ con $q = 2$

$$= 2 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = 2(2^n - 1)$$

(Dejamos al lector probar este resultado multiplicando ambos lados por $q - 1$), tenemos:

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{K^2} (K^2(x_1 - x_0))^{2^n}$$

Escogiendo entonces x_1 tal que:

$$K^2|x_1 - x_0| \leq \alpha < 1$$

$$|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{\alpha^{2^n}}{K^2} = \frac{e^{2nLn\alpha}}{K^2}$$

tiende a 0 cuando n tiende a infinito, ya que $\text{Ln } \alpha$ es negativo.

Vemos entonces que el algoritmo converge. Los puntos x_n tienden a x_0 , con tal que escojamos x_1 suficientemente cerca de x_0 .

Problema 2.4. El problema de Don Juvenio

En el fascículo III, de la serie de cálculo, ejemplo 2.5 del capítulo 2, tuvimos que calcular los ceros de la función:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 75x + \frac{275}{2}$$

- Grafique $f(x)$ para x entre 0 y 5, calculando $f'(x)$ y $f''(x)$. Compruebe que hay un cero entre 2 y 2.5, y otro entre 4 y 5.
- Tomando $x_1 = 2$, calcule, usando el método de Newton,

$$x_2, x_3, x_4, x_5.$$

- Estudie el signo de $f''(x)$ y $f'(x)$ y vea que x_{n+1} está a la izquierda de x_0 , la raíz de $f(x)$ entre 2 y 2.5.
- Partiendo del hecho que $0 < x_0 - x_1 < \frac{1}{2}$, dé cotas sobre

$$x_0 - x_2, x_0 - x_3, x_0 - x_4 \text{ y } x_0 - x_5.$$

- Mismas preguntas para la raíz de $f(x)$ entre 4 y 5.

Ejercicios:

- Calcule aproximadamente la raíz de $x^3 + x - 1$
- Calcule aproximadamente la raíz, entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, de $\tan x$
(Se recomienda usar tablas de valores de $\tan x$).

Problema 2.5

Se consideran dos esferas concéntricas de radios x y $x + 1$, respectivamente. ¿Para qué valor de x el volumen de la esfera más chica es igual al volumen comprendido entre las dos esferas? Siga los siguientes pasos:

- Recordando que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi R^3$, establezca la fórmula:
 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ a partir de la igualdad de los volúmenes.

- b) Grafique $f(x)$, calculando en particular los valores de $f(x)$ en los extremos locales. Vea que el único cero de $f(x)$ está entre 3 y 4.
- c) Tomando $x_1 = 4$, use el método de Newton para encontrar x_2 y x_3 .
- d) Pruebe la relación:

$$0 \leq x_{n+1} - x_0 \leq \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 2x_n - 1} (x_n - x_0)^2$$

y dé una estimación sobre el error para x_2 y x_3 , dado que $f(3.8) \simeq -0.848$ y por lo tanto: $0 \leq x_1 - x_0 \leq 0.2$.

Problema 2.6

Se consideran dos conos como en la figura 2.6:

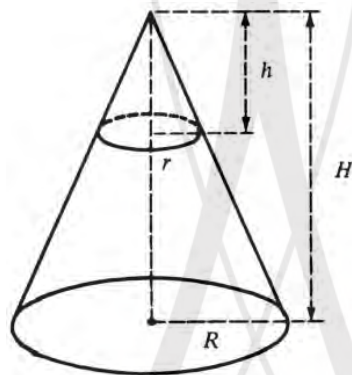


Figura 2.6

- a) Para $R = 5, H = 10$ y usando triángulos semejantes, exprese r en función de h .
- b) ¿Para qué valor de h el volumen del cono chico es la décima parte del volumen del cono más grande.?
- c) Calcule $\sqrt[3]{100}$ con dos cifras exactas.

Para usar el método de Newton en una computadora, basta dar las fórmulas:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|x_{n+1} - x_0| \leq K^2(x_n - x_0)^2$$

calculando una cota para K , escogiendo x_1 , el punto de partida, de tal modo que α sea menor que 1, e indicando la precisión deseada. La máquina calcula entonces $x_2, x_3, x_4, x_5 \dots$ hasta lograr esa precisión.

2.2 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En el fascículo IV, tuvimos que resolver el problema de calcular el área limitada por la ribera norte de un río y por una carretera (figura 2.7):

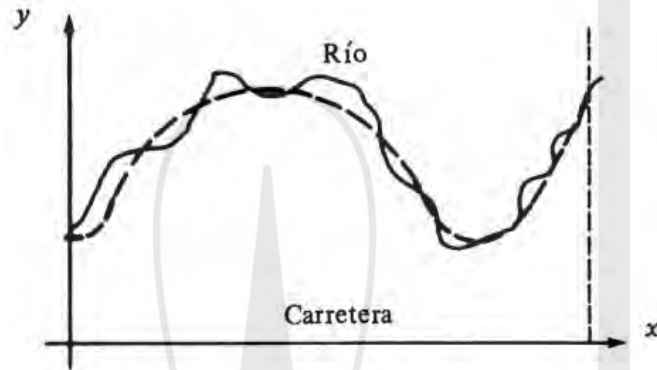


Figura 2.7

Para ello, se encontraron curvas cuya expresión analítica era sencilla, pero aproximando al contorno del río. Este procedimiento envuelve un error y, si llamamos $f(x)$ a la curva original y $g(x)$ a la curva aproximada, se deduce de la figura 2.8 que si:

$$|f(x) - g(x)| \leq M \text{ sobre } [a, b]$$

entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

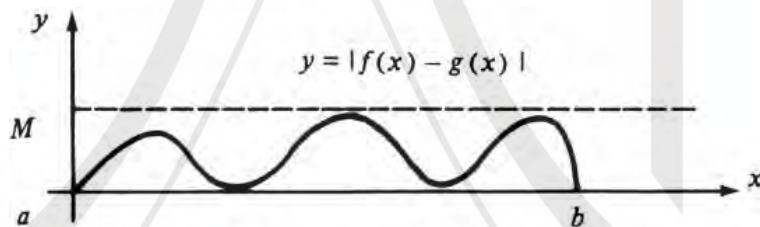


Figura 2.8

Ahora bien, nos interesa en primer término encontrar una forma de aproximar el valor de la integral de una función dada en términos de integrales de funciones que sean simples de calcular; en segundo término, la aproximación debe ser buena y, finalmente, es importante tener una idea del error cometido en la aproximación. En esta sección veremos algunos métodos de resolución de este problema.

2.2.1 Método del Trapecio

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos, podemos aproximar en cada uno de ellos la curva $y = f(x)$ por la secante que pasa por los extremos (figura 2.9).

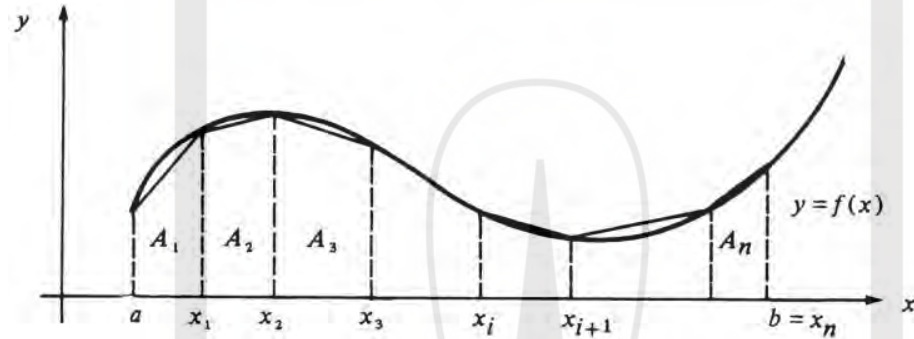


Figura 2.9

Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$, $\int_a^b f(x) dx$, es aproximadamente la suma de las áreas de los trapecios:

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=1}^n A_i$$

Como

$$A_i = \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

y si tomamos todos los intervalos de una misma longitud h , tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{2} f(x_0) + h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + \frac{h}{2} f(x_n)$$

Necesitamos ahora estimar el error que se comete al usar esta fórmula, es decir:

$$e = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i \right|$$

Ahora, como A_i , el área del trapecio, es precisamente el área bajo la secante que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, con ecuación:

$$y = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1})$$

obtenemos para el error e_i en el i -ésimo intervalo:

$$\begin{aligned} e_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - A_i \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}) \right) dx \end{aligned}$$

Si ponemos:

$$g(x) = f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1})$$

entonces

$$e_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx$$

Tenemos entonces que estimar esa integral. Si usamos la fórmula del error:

$$g(x) = g(x_{i-1}) + g'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + g''(c_x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2}$$

con $x_{i-1} < c_x < x_i$

Ahora:

$$\begin{aligned} g(x_{i-1}) &= 0 \\ g'(x) &= f'(x) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \\ g''(x) &= f''(x) \end{aligned}$$

Pero, como

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_{i-1})h + f''(c_i) \frac{h^2}{2},$$

$$g(x) = -f''(c_i) \frac{h}{2}(x - x_{i-1}) + f''(c_x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2}$$

Entonces, si $|f''(x)| \leq M$ sobre $[a, b]$:

$$|g(x)| \leq \frac{Mh}{2}(x - x_{i-1}) + \frac{M}{2}(x - x_{i-1})^2$$

para x entre x_{i-1} y x_i .

Por lo tanto:

$$|e_i| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x)| dx$$

$$|e_i| \leq \frac{Mh}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx + \frac{M}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 dx$$

$$|e_i| \leq \frac{Mh}{4} (x_i - x_{i-1})^2 + \frac{M}{6} (x_i - x_{i-1})^3 = M \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) h^3$$

$$|e_i| \leq \frac{5}{12} Mh^3$$

Finalmente:

$$|e| = \left| \sum_{i=1}^n e_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |e_i| \leq \frac{5}{12} Mh^3 n$$

y como

$$n = \frac{b-a}{h}$$

la expresión final para el error es:

$$|e| \leq \frac{5}{12} (b-a) Mh^2$$

Vemos entonces que para mejorar la aproximación hay que aumentar el número de intervalos, con un error proporcional a h^2 .

Ejercicios:

2.6 ¿Cuántos intervalos se necesitan para calcular con este método $\int_0^1 x^2 dx$ con un error menor que $\frac{1}{100}$? Haga el cálculo.

2.7 Se puede mejorar el factor $\frac{5}{12}$ de las maneras siguientes:

a) Considere la función

$$\Psi_i(x) = \int_{x_{i-1}}^x f(t) dt - \frac{(x - x_{i-1})}{2} (f(x_{i-1}) + f(x)).$$

Calcule $\Psi'_i(x)$, $\Psi''_i(x)$ y, aplicando la fórmula del error a $\Psi_i(x_i)$ en función de $\Psi_i(x_{i-1})$, $\Psi'_i(x_{i-1})$, estime el error e_i .

(Respuesta: $|e_i| \leq \frac{M}{4} h^3$)

b) Sea

$$\phi_i(x) = \int_{x_{i-1}}^x f(t) dt - \frac{(x - x_{i-1})}{2} (f(x_{i-1}) + f(x)) - K(x - x_{i-1})^3.$$

b_1 : Escoja K tal que $\phi_i(x_i) = 0$

b_2 : Vea que $\phi_i(x_{i-1}) = 0$ y que existe c_1 tal que $\phi_i'(c_1) = 0$

b_3 : Vea que $\phi_i'(x_{i-1}) = 0$ y que existe c_2 tal que $\phi_i''(c_2) = 0$ con $x_{i-1} < c_2 < c_1$

b_4 : Pruebe que $K = -\frac{f''(c_2)}{12}$ y que: $e_i = Kh^3$.

En este último ejercicio vemos que el error crece con M , para h fijo. Esto es de esperarse, ya que M grande significa que hay una curvatura grande y por este motivo la aproximación lineal no es buena.

Ejemplo 2.8. Gasto hidráulico

Nuestra fórmula del trapecio nos da un valor aproximado de

$$\int_a^b f(x) dx$$

en términos de los valores $f(x)$ en los puntos x_i , sin necesidad de conocer los valores de $f(x)$ en otros puntos. Este hecho es muy útil en problemas prácticos. Ilustraremos este hecho con la determinación del gasto hidráulico descrito en el fascículo IV de cálculo.

Recordaremos que si $\nu(t)$ es la velocidad del agua en la boca de un tubo de sección rectangular con lados a y b , el gasto está dado por:

$$Q(t) = ab \int_0^t \nu(s) ds.$$

En muchas situaciones el medidor de velocidades no se lee continuamente, por el costo de almacenamiento de la información, sino a intervalos de tiempo iguales (figura 2.10):

$$t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, \dots, t_n = t_0 + nh,$$

obteniendo $\nu(t_0), \nu(t_1), \dots, \nu(t_n)$. Usando el método del trapecio

$$Q(t_n) \sim \frac{\nu(t_0) + \nu(t_n)}{2}h + (\nu(t_1) + \nu(t_2) + \dots + \nu(t_{n-1}))h$$

con un error proporcional a h^2 .

Notemos que no conocemos la constante M en la fórmula del error. En la práctica se puede uno dar una idea de su valor haciendo un estudio experimental, con intervalos de tiempo muy cercanos, o considerando las características del tubo y estimando ese valor por otro método.

Vemos así, que la integración numérica tiene dos usos distintos: uno cuando la función es muy complicada y no se puede calcular su integral usando el teorema fundamental del cálculo o alguna de las técnicas analíticas; el otro para calcular integrales cuando sólo se conoce el valor de la función en ciertos puntos.

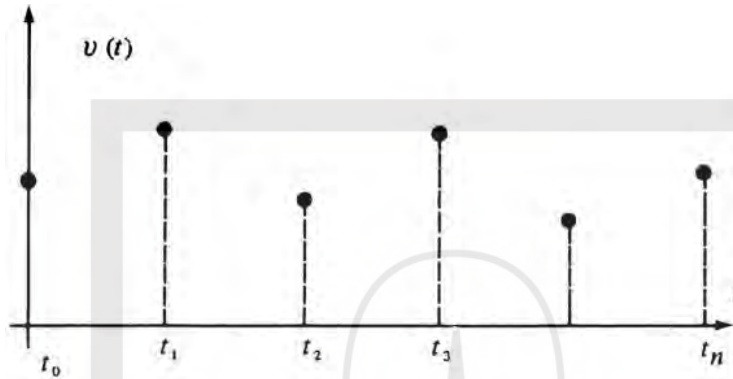


Figura 2.10

Hay muchas otras técnicas de integración numérica, ya que la idea es escoger de manera apropiada una curva que aproxime la función que se desea integrar. A continuación daremos otros dos métodos.

2.2.2 Método del punto medio

Cuando empezamos a estudiar la integral de una función usamos aproximaciones por rectángulos (figura 2.11).

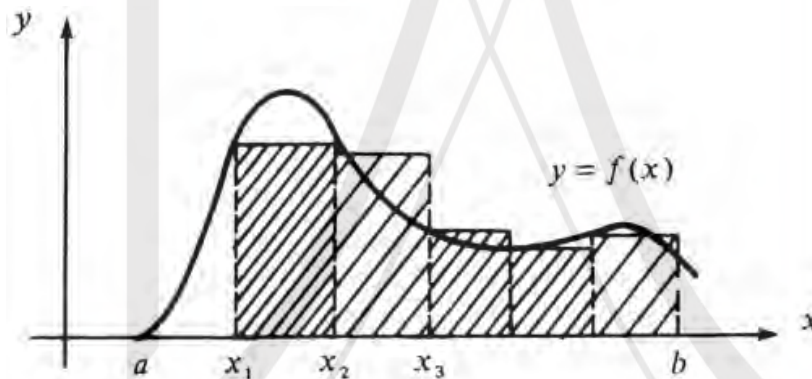


Figura 2.11

Para obtener la altura de cada rectángulo se puede escoger el valor de $f(x)$ en alguno de los extremos de cada intervalo, o en cualquier punto intermedio (figura 2.12).

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(c_i) \text{ con } x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

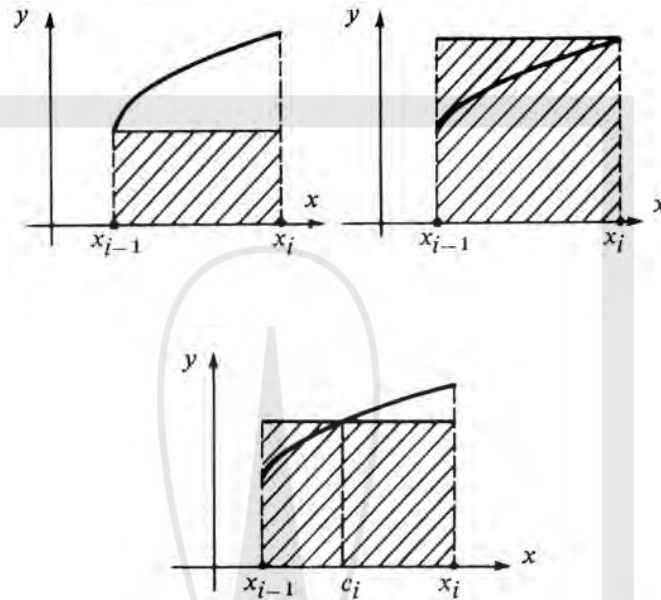


Figura 2.12

Invitamos al lector a que haga varios dibujos como los anteriores. Se podrá convencer que la mejor aproximación se obtiene, en general, cuando se toma el punto medio entre x_{i-1} y x_i , por lo menos cuando no hay cambios en el crecimiento de la función en el intervalo.

De hecho, si escogemos

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

el área del rectángulo será:

$$B_i = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Es decir,

$$B_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) dx$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - B_i \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x) - f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right] dx \end{aligned}$$

Por la fórmula del error, tenemos:

$$f(x) = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + \frac{f''(c_x)}{2}\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2$$

Ahora,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) dx = \frac{1}{2} f'\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2 \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |E_i| &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{M}{2} \left(x - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^2 dx \leq \\ &\leq \frac{M}{6} \left[\left(x_i - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^3 - \left(x_{i-1} - \frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)^3 \right] \leq \frac{M}{6} \left[2 \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right] \\ |E_i| &\leq \frac{Mh^3}{24}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n B_i \right| \leq \frac{M(b-a)}{24} h^2.$$

Ejercicio 2.8

Sea

$$\phi_i(x) = \int_{x_{i-1}}^x f(t) dt - (x - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1} + x}{2}\right),$$

Calcule $\phi_i'(x)$ y $\phi_i''(x)$ y use la fórmula del error en x_{i-1} para dar una estimación sobre E_i .

2.2.3 Método de Simpson

Se puede decidir aproximar a la función por un polinomio de grado más alto; por ejemplo, por arcos de parábola. Concretamente dividamos el intervalo $[a, b]$ en un número par de intervalos (figura 2.13).

En el intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, reemplazaremos la función $f(x)$ por una parábola que pasa por los puntos:

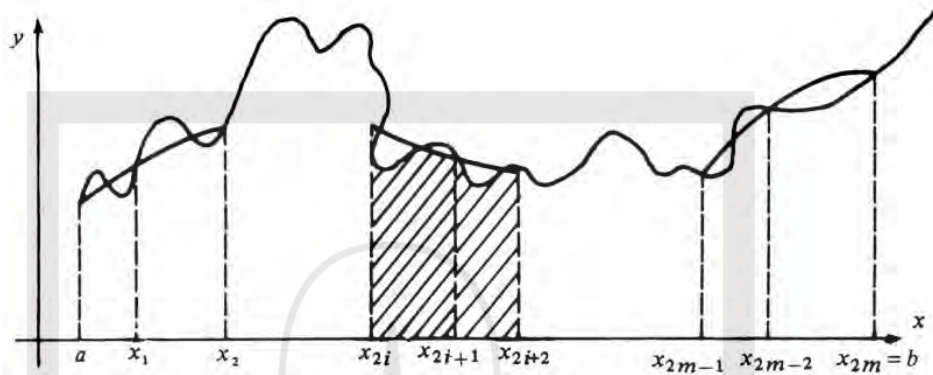


Figura 2.13

$$P_{2i} = (x_{2i}, f(x_{2i})), P_{2i+1} = (x_{2i+1}, f(x_{2i+1})), P_{2i+2} = (x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$$

Tendremos entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \sim A_0 + A_1 + \dots + A_i + \dots + A_{m-1}$$

donde A_i es el área acotada por el arco de parábola que pasa por $P_{2i}, P_{2i+1}, P_{2i+2}$ y las rectas $x = x_{2i}, x = x_{2i+2}$.

Para calcular A_i debemos encontrar la ecuación de esa parábola; es decir, determinar los coeficientes α, β, γ en la ecuación:

$$p(x) = \alpha(x - x_{2i+1})^2 + \beta(x - x_{2i+1}) + \gamma$$

Como

$$\begin{aligned} p(x_{2i}) &= f(x_{2i}) = \alpha h^2 - \beta h + \gamma \\ p(x_{2i+1}) &= f(x_{2i+1}) = \gamma \\ p(x_{2i+2}) &= f(x_{2i+2}) = \alpha h^2 + \beta h + \gamma \end{aligned}$$

usando

$$x_{2i} = x_{2i+1} - h, x_{2i+2} = x_{2i+1} + h$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x_{2i+2}) + f(x_{2i}) - 2f(x_{2i+1}) &= 2\alpha h^2 \\ f(x_{2i+2}) - f(x_{2i}) &= 2\beta h. \end{aligned}$$

Entonces,

$$A_i = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p(x) dx = \alpha \frac{(x - x_{2i+1})^3}{3} \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + \beta \frac{(x - x_{2i+1})^2}{2} \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} + \gamma(x - x_{2i+1}) \Big|_{x_{2i}}^{x_{2i+2}}$$

$$A_i = 2\alpha \frac{h^3}{3} + 2\gamma h = \frac{h}{3}(2\alpha h^2 + 6\gamma)$$

$$A_i = \frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) \text{ para } i = 0, \dots, m - 1$$

Es decir, $A_0 = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$

$$A_1 = \frac{h}{3}(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

$$A_2 = \frac{h}{3}(f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))$$

$$A_{m-1} = \frac{h}{3}(f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b))$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3}(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2m-2})) + \frac{4h}{3}(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2m-1}))$$

Es de esperarse que esta fórmula, la regla de Simpson, será más precisa que las aproximaciones anteriores, ya que la aproximación cuadrática a la función es mejor que la lineal. Desde luego se pagó el precio al obtener una fórmula más complicada. En general, se puede aproximar una función por un polinomio de grado más alto, pidiéndole que pase por más puntos y obtener así una fórmula de aproximación numérica.

Para calcular el error

$$\begin{aligned} E_i &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx - A_i \\ &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (f(x) - \alpha(x - x_{2i+1})^2 - \beta(x - x_{2i+1}) - \gamma) dx \\ &= \int_{-h}^h (f(d_i + z) - \alpha z^2 - \beta z - \gamma) dz \end{aligned}$$

donde pusimos $x = d_i + z = x_{2i+1} + z$.

Usaremos entonces la fórmula de Taylor:

$$f(d_i + z) = f(d_i) + f'(d_i)z + f''(d_i)\frac{z^2}{2!} + f'''(d_i)\frac{z^3}{3!} + f^{(4)}(c_z)\frac{z^4}{4!}$$

con c_z entre d_i y $d_i + z$.

Notando que

$$\int_{-h}^h z dz = \int_{-h}^h z^3 dz = 0, \gamma = f(d_i)$$

obtenemos

$$|E_i| \leq \left| \int_{-h}^h \left(\frac{f''(d_i)}{2} - \alpha \right) z^2 dz \right| + \int_{-h}^h M \frac{z^4}{24} dz$$

donde M es un número mayor que $|f^{(4)}(x)|$ para toda x entre a y b .

Ahora, como

$$\alpha = \frac{1}{2h^2}(f(d_i + h) - f(d_i) + f(d_i - h) - f(d_i)),$$

usando la fórmula de Taylor con $z = \pm h$, tenemos:

$$\alpha = (f^{(4)}(c_h) + f^{(4)}(c_{-h}))\frac{h^2}{48} + \frac{1}{2}f''(d_i).$$

Entonces,

$$|E_i| \leq \frac{h^2}{48} \int_{-h}^h |f^{(4)}(c_h) + f^{(4)}(c_{-h})| z^2 dz + \frac{2}{5} \frac{M}{24} h^5$$

$$|E_i| \leq 2M \frac{h^2}{48} \int_{-h}^h z^2 dz + \frac{Mh^5}{60}$$

$$|E_i| \leq \frac{Mh^5}{36} + \frac{Mh^5}{60} = \frac{Mh^5}{12} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$|E_i| \leq \frac{4}{45} Mh^5 \text{ para } i = 0, \dots, m-1.$$

El error total, E , sobre $\int_a^b f(x) dx$ será entonces menor que:

$$|E_0| + |E_1| + \dots + |E_{m-1}|$$

$$|E| \leq \frac{4}{45} Mh^5 m \text{ con } m = \frac{b-a}{2h}$$

$$|E| \leq \frac{2}{45} M(b-a)h^4$$

donde M es una cota para

$$|f^{(4)}(x)|, \text{ con } x \text{ en } [a, b].$$

Ejercicios:

- 2.9 ¿Cuántos puntos se necesitan en el intervalo $[0, 1]$ para calcular $\int_0^1 x^4 dx$ con un error menor que $\frac{1}{240}$. Calcule esa aproximación.
- 2.10 Mismas preguntas para $\int_0^1 (x^3 - 6x - 21) dx$. Explique gráficamente el resultado.



<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Capítulo 3

AJUSTE DE CURVAS

El último capítulo de este fascículo presenta una transición entre la parte netamente matemática de los dos primeros capítulos y el material que se verá en el fascículo VI. Es decir, el cómo desarrollar un modelo de un fenómeno real a partir de leyes experimentales y el cómo resolver el problema matemático planteado.

De hecho, cuando uno quiere establecer un modelo matemático para algún fenómeno, uno dispone, en general, solamente de algunos datos experimentales. A partir de ellos se formulan ciertas hipótesis, por ejemplo, que el fenómeno depende de ciertas variables, se propone un modelo y se llega a ciertas conclusiones. Nuevos experimentos permiten entonces decidir si el modelo es válido o si se debe cambiar totalmente, o solamente modificar algunos detalles. Típicamente podemos disponer los datos en una gráfica como en la figura 3.1.

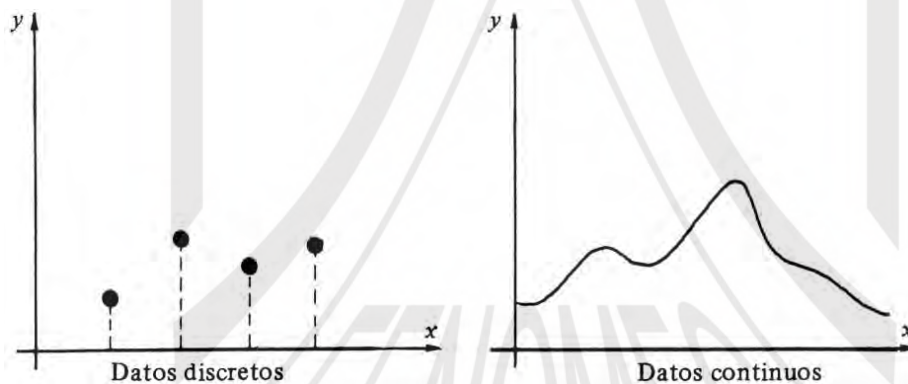


Figura 3.1

El primer paso es entonces, decidir si y es realmente una función de x . Un buen criterio para esto es el obtener datos muy parecidos al repetir el experimen-

to. El estudio matemático correspondiente es parte de lo que se llama inferencia estadística y es demasiado alejado del propósito de este fascículo. Admitiendo que y es efectivamente función de x , necesitamos proponer esa función o encontrar una función simple de estudiar cercana a esa función, teniendo en cuenta los errores experimentales. En los primeros capítulos ya hemos tocado el tema de aproximación de una curva por rectas, parábolas o polinomios de grado más alto; por ejemplo, en las discusiones de las reglas del trapecio y de Simpson. En este capítulo veremos como proponer, en algunas situaciones concretas, la función $y = f(x)$, ajustando una curva, o los parámetros de esta curva, a los datos.

3.1 UN MODELO DE GANANCIAS

En el fascículo I, sección 2.5, nos encontramos con un productor con costos fijos de 250,000 pesos mensuales y costo por unidad de 150 pesos. Es decir, la función de costos al producir n unidades era: $c(n) = 250,000 + 150n$. Además, el productor contaba con los siguientes datos

Si el precio de venta, p , era de:	$p = 250$ pesos por unidad
La demanda era de:	$n = 3,000$ unidades
Mientras que si	$p = 300$ pesos por unidad;
entonces,	$n = 2,100$ unidades.

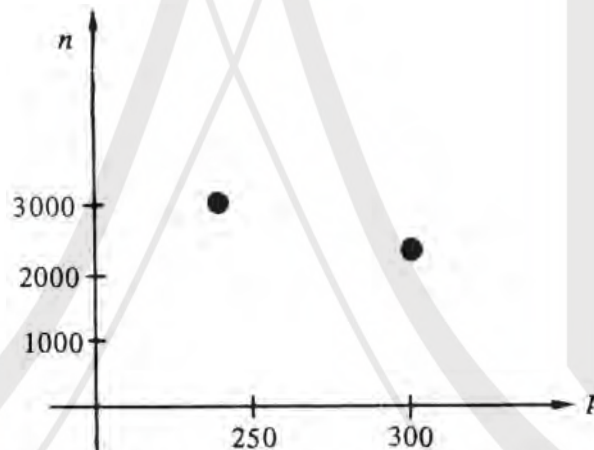


Figura 3.2

El productor formuló la hipótesis siguiente: La demanda n es función del precio p , y propuso el modelo lineal: $n = 7,500 - 18p$; obteniendo una ganancia: $G = np - c(n) = -18p^2 + 10,200p - 1,375,000$.

La ganancia óptima se obtenía teóricamente para:

$$p_0 = 283.33 \quad \text{con} \quad c(p_0) \simeq 70,000 \\ n(p_0) \simeq 2,400 \text{ unidades}$$

Ahora bien, algunos economistas dicen que la demanda es inversamente proporcional al precio, lo cual suena lógico ya que si un producto cuesta menos, mucha más gente lo comprará. Si ponemos entonces $n = \frac{\alpha}{p}$ para alguna constante α , debemos determinar α a partir de los datos: $\alpha = pn$

$$\text{Si } n = 3,000, p = 250 \text{ obtendremos: } \alpha = 750,000$$

$$n = 2,100, p = 300 \text{ obtendremos: } \alpha = 630,000$$

Podríamos decir que, debido a las fluctuaciones de la demanda, los datos no son exactos y tomar un valor intermedio para α , digamos 700,000.

En ese caso para $p = 300$, n debería ser 2,333 y para $p = 250$, $n = 2,800$: En los dos casos un error de más de 200. El modelo no es satisfactorio y lo modificaremos ligeramente suponiendo que:

$$n = \frac{\alpha}{p} + \beta$$

Entonces,

$$3,000 = \frac{\alpha}{250} + \beta$$

$$2,100 = \frac{\alpha}{300} + \beta$$

Restando las ecuaciones:

$$900 = \alpha \left(\frac{1}{250} - \frac{1}{300} \right) = \frac{50\alpha}{250 \times 300} = \frac{\alpha}{1,500} \\ \alpha = 1,350,000 \quad \beta = -2,400$$

Notemos que $n = 0$ si $p = -\frac{\alpha}{\beta} = 562.5$ pesos, lo cual se puede interpretar como que el producto está demasiado caro para que tenga demanda.

Entonces, la función de ganancia

$$G(p) = np - c(n) = n(p - 150) - 250,000 \\ = \left(\frac{1,350,000}{p} - 2,400 \right) (p - 150) - 250,000 \\ G(p) = \frac{150 \times 1,350,000}{p} - 2,400p + 1,460,000$$

Entonces,

$$G'(p) = \frac{150 \times 1,350,000}{p^2} - 2,400 = \frac{2,400}{p^2} (84,375 - p^2)$$

Vemos entonces, que $G(p)$ tiene un máximo en

$$p_0 = 75\sqrt{15} \simeq 290.5 \text{ pesos}$$

con

$$n(p_0) = 1,200(\sqrt{15} - 2) \simeq 2,248 \text{ unidades,}$$

y

$$G(p_0) = 10,000(73 - 18\sqrt{15}) \simeq 65,732 \text{ pesos.}$$

Dejamos como ejercicio el verificar estos cálculos.

¿Cuál de los dos modelos de dependencia es mejor? En la práctica el productor tomará la decisión de fijar uno de los dos precios y se pondrá a observar sus ventas en los meses siguientes. También puede hacer un estudio del mercado y aportar nuevos elementos para su modelo. En ambos casos se podrá hacer una mejor hipótesis acerca de la relación entre n y p , y proseguir la investigación mientras dé resultados de utilidad práctica o con el propósito menos pragmático de satisfacer la curiosidad científica del productor. Por ejemplo puede hacerse una interpolación de la forma:

$$n = ap^2 + bp + c;$$

$$n = ap + b + \frac{c}{p};$$

$$n = a + \frac{b}{p} + \frac{c}{p^2};$$

o alguna otra diferente.

Ejercicios:

- 3.1 Suponiendo que para $p = 270$, $n = 2,400$ y los datos anteriores, estudie el modelo: $n = ap^2 + bp + c$, probando primero que:

$$a = \frac{2}{5}, \quad b = -238, \quad c = 37,500;$$

grafique n como función de p y encuentre el máximo de $G(p)$. Si se supone que a precio mayor, menor venta, ¿qué se puede decir del modelo para p entre 250 y 300?

- 3.2. Conteste las mismas preguntas para los otros dos modelos con los mismos datos.

3.2 AVENIDAS DE UN RÍO E INTEGRACIÓN USANDO EL ARCOTANGENTE

Un fenómeno familiar para todos nosotros es el de las avenidas de los ríos. Se caracteriza por una forma muy especial de la gráfica de la velocidad del agua en función del tiempo: La velocidad es prácticamente constante, hasta que en un cierto momento sube muy rápidamente, alcanza un valor grande y baja rápidamente hasta tomar de nuevo el valor constante (figura 3.3).

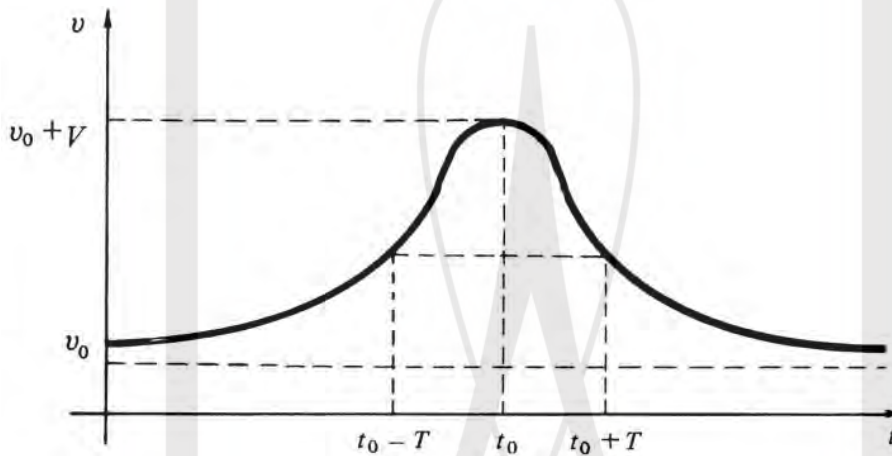


Figura 3.3

Si queremos calcular el gasto hidráulico provocado por una avenida en una tubería de sección transversal rectangular de lados a y b , debemos encontrar:

$$Q(t) = ab \int_0^t v(s) ds$$

como ya lo hemos estudiado en el ejemplo 2.8. del segundo capítulo. El problema es entonces encontrar una expresión analítica para la función $v(t)$ que preserve las características más importantes del fenómeno físico. El valor v_0 de la velocidad en ausencia de la avenida, la posición y la altura del máximo de $v(t)$ y el parámetro T distancia del máximo a los puntos de inflexión que es una medida de la duración de la avenida.

Examinando la gráfica, podemos escribir la función $v(t)$ como:

$$v(t) = v_0 + V(t)$$

donde $V(t)$ es el exceso de la velocidad con respecto a su valor v_0 en tiempo normal. $V(t)$ tiene un máximo V en t_0 , puntos de inflexión en $t_0 - T$ y $t_0 + T$, parece ser simétrica con respecto a la vertical $t = t_0$ y tiende a cero cuando t tiende a $\pm\infty$.

Hay muchas funciones con estas características pero, por razones de estadística, hay dos funciones de esa forma que se usan en la práctica:

a) La primera es la **ley de Gauss**,

$$V(t) = V e^{-(t-t_0)^2/2T^2}$$

Dejamos como ejercicio el graficar esta curva, llamada curva en campana, y verificar que tiene las propiedades deseadas. La dificultad con esta fórmula es que no se puede integrar en términos de funciones simples y uno tiene que recurrir a tablas de valores numéricos.

b) La segunda es la **ley de Cauchy**,

$$V(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2 + (t - t_0)^2}$$

donde debemos determinar α y β . Se trasladó la función $\frac{\alpha}{\beta^2+t^2}$ t_0 unidades a la derecha para tener la simetría con respecto a t_0 .

La derivada de esta función es:

$$\frac{-2\alpha^2(t - t_0)}{(\beta^2 + (t - t_0)^2)^2}$$

anulándose en t_0 , positiva para $t - t_0 < 0$ y negativa para $t > t_0$ dando un máximo en t_0 . En $t_0 : V(t_0) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = V$.

La segunda derivada es

$$-2\alpha^2 \frac{(\beta^2 + (t - t_0)^2 - 4(t - t_0)^2)}{(\beta^2 + (t - t_0)^2)^3} = \frac{-2\alpha^2(\beta^2 - 3(t - t_0)^2)}{(\beta^2 + (t - t_0)^2)^3}$$

Los puntos de inflexión estarán localizados en:

$$t - t_0 = \pm \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \pm T.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \beta^2 &= 3T^2 \\ \alpha^2 &= 3T^2 V. \end{aligned}$$

Entonces, al ajustar los parámetros, encontramos:

$$v(t) = v_0 + \frac{3T^2 V}{3T^2 + (t - t_0)^2}$$

Por lo tanto, el gasto hidráulico será:

$$Q(t) = ab \int_0^t v(s) ds = ab \left(v_0 t + 3T^2 V \int_0^t \frac{ds}{3T^2 + (s - t_0)^2} \right)$$

Esta última integral es de un tipo nuevo para nosotros, pero hemos visto en la sección 1.2, del primer capítulo, que:

$$(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

la cual es una forma parecida al integrando $\frac{1}{3T^2 + (s - t_0)^2}$.

Trataremos pues, de usar nuestros conocimientos de cambios de variables para calcular la integral:

$$\int_0^t \frac{ds}{3T^2 + (s - t_0)^2} = I(t)$$

Si ponemos $s = t_0 + u$ obtenemos:

$$I(t) = \int_{-t_0}^{t-t_0} \frac{du}{3T^2 + u^2}$$

Para reducir el integrando a la forma deseada, tomemos:

$$u = \sqrt{3T}v$$

Entonces,

$$I(t) = \int_{\frac{-t_0}{\sqrt{3T}}}^{\frac{t-t_0}{\sqrt{3T}}} \frac{\sqrt{3T} dv}{3T^2(1+v^2)} = \frac{1}{\sqrt{3T}} \int_{\frac{-t_0}{\sqrt{3T}}}^{\frac{t-t_0}{\sqrt{3T}}} \frac{dv}{1+v^2}$$

Por lo tanto,

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{3T}} \left(\text{Arctan} \left(\frac{t-t_0}{\sqrt{3T}} \right) - \text{Arctan} \left(\frac{-t_0}{\sqrt{3T}} \right) \right)$$

La expresión del gasto hidráulico será:

$$Q(t) = abv_0 t + ab\sqrt{3T}V \left(\text{Arctan} \left(\frac{t-t_0}{\sqrt{3T}} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{t_0}{\sqrt{3T}} \right) \right)$$

acordándose que $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan } x$.

Ejercicio

3.3 Grafique $Q(t)$. ¿Qué pasa cuando t es muy grande? ¿Cuál es la interpretación?

Notemos finalmente que integrales de la forma:

$$\int \frac{ds}{(s-a)^2 + b^2},$$

pueden calcularse por el mismo método:

$$\int \frac{ds}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{ds}{\left(\frac{s-a}{b}\right)^2 + 1}$$

Para reducir el integrando a la forma deseada, tomaremos

$$u = \frac{s-a}{b}$$

$$\int \frac{ds}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{b} \text{Arctan } u :$$

$$\int \frac{ds}{(s-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \text{Arctan} \left(\frac{s-a}{b} \right)$$

Igualmente para

$$\int \frac{ds}{as^2 + bs + c}$$

podemos escribir el denominador:

$$\begin{aligned} as^2 + bs + c &= a\left(s^2 + \frac{b}{a}s + c\right) \\ &= a\left(\left(s + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ completando cuadrados} \\ &= a\left(\left(s + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

Entonces, si $b^2 - 4ac < 0$, podemos escribir:

$$as^2 + bs + c = a((s - \alpha)^2 + \beta^2)$$

con

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ y } \beta^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}, \text{ obteniendo la integral precedente.}$$

La condición $b^2 - 4ac < 0$ nos dice que el polinomio $as^2 + bs + c$ no tiene raíces. Para el caso $b^2 - 4ac = 0$, la integral vale:

$$\frac{1}{a\left(s + \frac{b}{2a}\right)}$$

mientras que para $b^2 - 4ac > 0$, podemos escribir la integral en la forma

$$\frac{1}{a} \int \frac{ds}{(s - \alpha)^2 - \gamma^2} \text{ con } \gamma^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

El cálculo de esta integral, con el método de fracciones parciales, será el objeto de una sección del fascículo VI.

3.3 MODELO DE UNA PRESA Y VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONOCIDA

En muchas ocasiones es importante conocer el volumen de agua contenido en un depósito. Por ejemplo, en una presa que es en general de forma irregular, ya que depende de la topografía del terreno donde se construyó. Se podría intentar vaciar la presa y medir el volumen de agua que entra, pero este método no es ni muy práctico, ni rápido, ni preciso, ya que es difícil medir las precipitaciones de lluvia y la cantidad de agua proveniente de manantiales, mantos acuíferos, etc. En cambio con la ayuda de un mapa topográfico podemos determinar el volumen de agua en función del nivel de la presa; es decir podemos plantar una estaca en el punto más profundo de la presa y graduarla en volumen de la manera que vamos a describir.

El problema es determinar el volumen del sólido de la figura 3.4 en función de h :

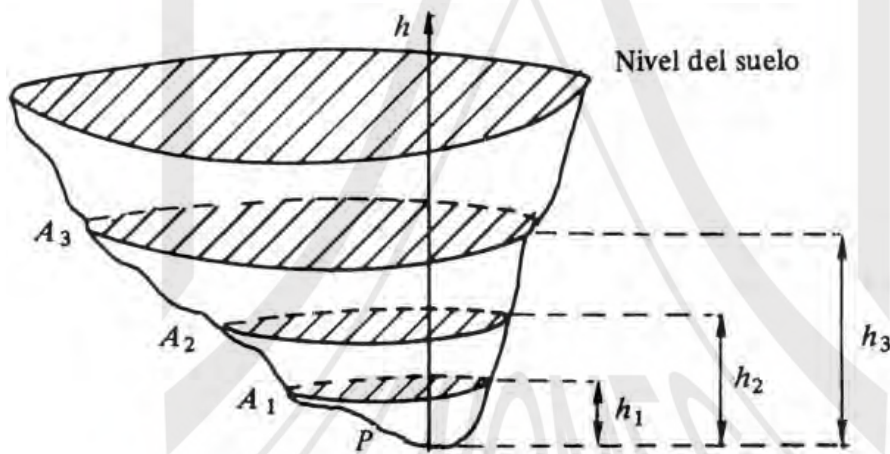


Figura 3.4

El mapa topográfico muestra la forma del depósito para las alturas $h_1, h_2, h_3 \dots$ (figura 3.5):

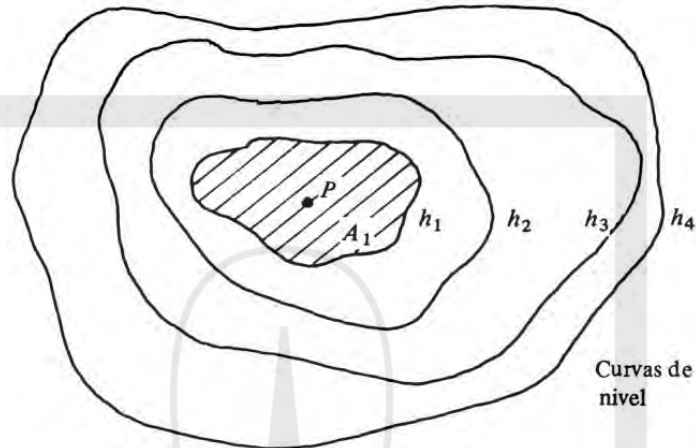


Figura 3.5

Aquí las curvas corresponden a los puntos que están a la misma altura $h_1, h_2, h_3, h_4, \dots$, el área adentro de cada curva corresponde a la sección transversal de la presa que está a la altura h_i por encima del punto p , por ejemplo. Como podemos determinar sobre el mapa el área de cada sección transversal, por lo menos aproximadamente como lo veremos más adelante, el problema se reduce al cálculo de un volumen conociendo para cada altura h , el área de la sección transversal $S(h)$.

Empezaremos por un ejemplo simple, el volumen de un tronco de cono (figura 3.6).

Si dividimos la altura H en n pedazos, cada uno de altura $\Delta h = H/n$ podemos aproximar el volumen, por discos encimados, cada uno de altura Δh y de radio $R_1, \dots, r_i, \dots, R_2$, como se ve en la figura 3.7.

Entonces queda claro, que si V_i es el volumen del disco de radio r_i y altura Δh , el volumen total será:

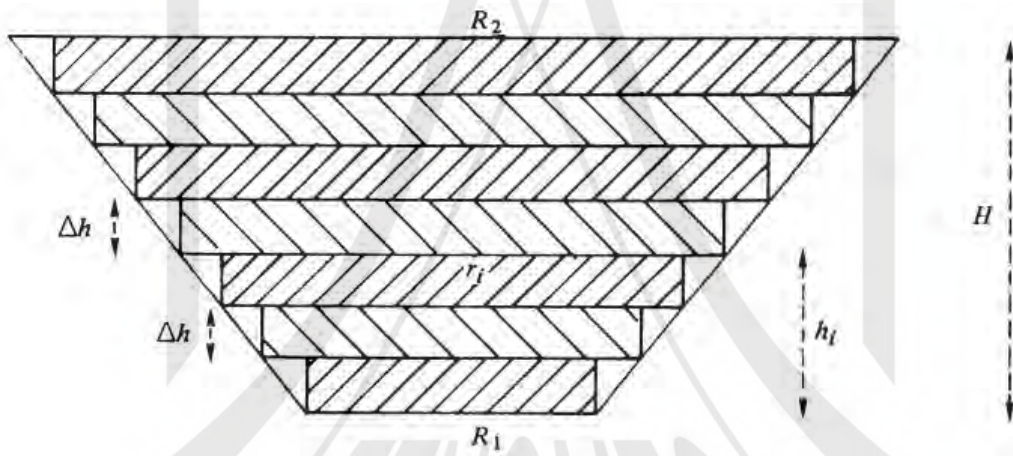
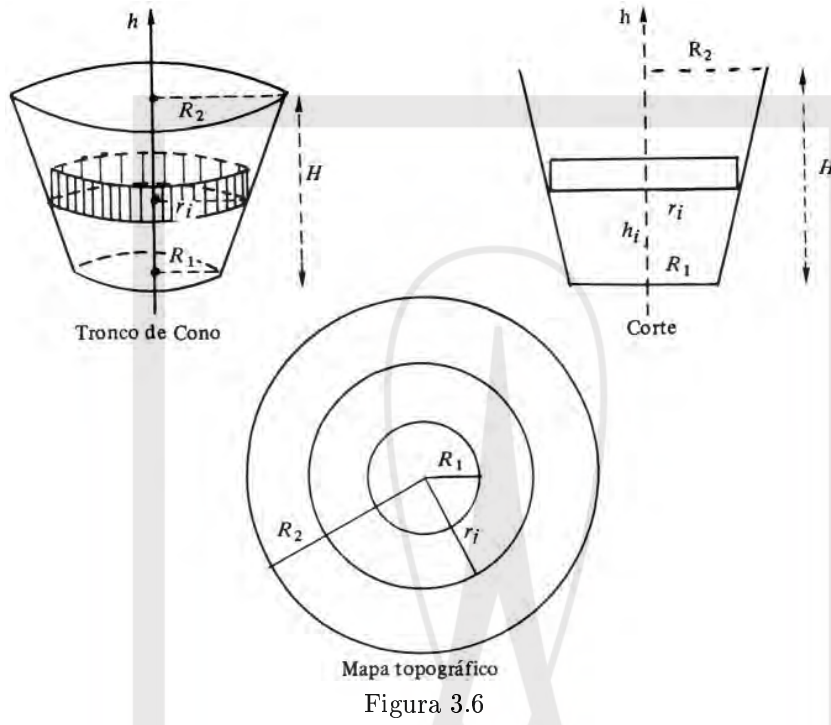
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i$$

Ahora bien: $V_i = \pi r_i^2 \Delta h$ ya que tenemos un cilindro de radio r_i y altura $\Delta h = h_{i+1} - h_i$. Para expresar r_i en función de h , vemos que r_i es la ordenada del punto Q sobre la recta pasando por $(0, R_1)$ y (H, R_2) en la gráfica de la figura 3.8.

Es decir $r_i = r(h_i)$ donde

$$r(h) = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{H} h.$$

Tenemos entonces



$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi r_i^2 (h_{i+1} - h_i)$$

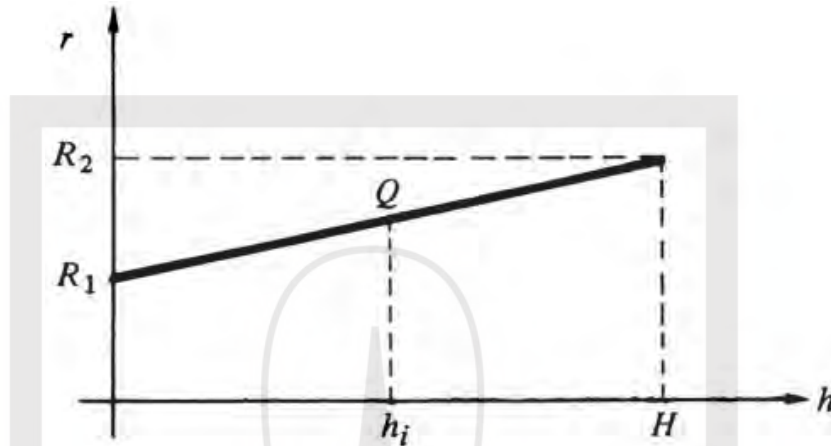


Figura 3.8

Reconocemos en esta expresión el valor:

$$V = \int_0^H \pi r(h)^2 dh$$

Llamando $S(h) = \pi r(h)^2$ el área de la sección transversal del tronco de cono a la altura h , obtenemos:

$$V = \int_0^H S(h) dh$$

En este caso: $V = \int_0^H \pi \left(R_1 + \frac{(R_2 - R_1)h}{H} \right)^2 dh$.

Ejercicio 3.4:

Pruebe que $V = \frac{\pi H}{3(R_2 - R_1)}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{\pi H}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$.

Veamos ahora el caso de un depósito de sección transversal arbitraria pero cuya área depende de la altura h en una forma conocida (figura 3.9).

Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, podemos aproximar el volumen por una pila de cilindros de área $S(h_i)$ y altura $(h_{i+1} - h_i)$, para $i = 1, \dots, n$.

De este modo:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i$$

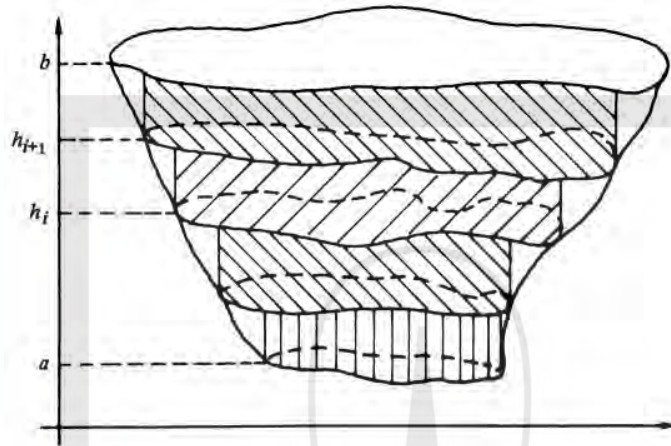


Figura 3.9

con

$$V_i = S(h_i)(h_{i+1} - h_i)$$

Tenemos entonces:

$$V = \int_a^b S(h) dh$$

Por ejemplo, para un sólido de revolución obtenido haciendo girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x (figura 3.10) obtenemos:

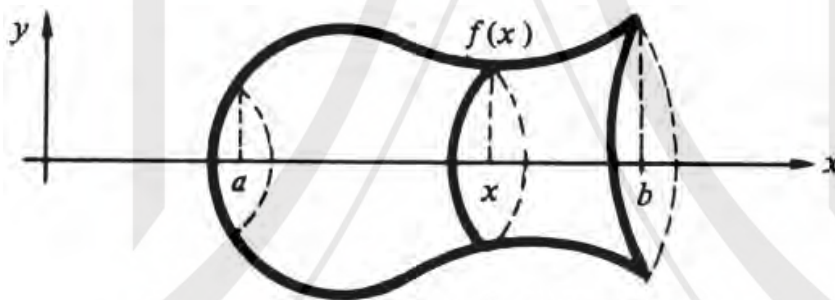


Figura 3.10

$S(x) = \pi f(x)^2$, ya que la sección transversal es un disco de radio $f(x)$, por lo tanto:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

fórmula que ya obtuvimos en el fascículo IV.

Trataremos ahora de resolver el problema del volumen de la presa. La variable h será el nivel de la presa a partir del punto P de mayor profundidad y las secciones transversales son aquellas cuyo contorno está dado en el mapa topográfico (figura 3.11).

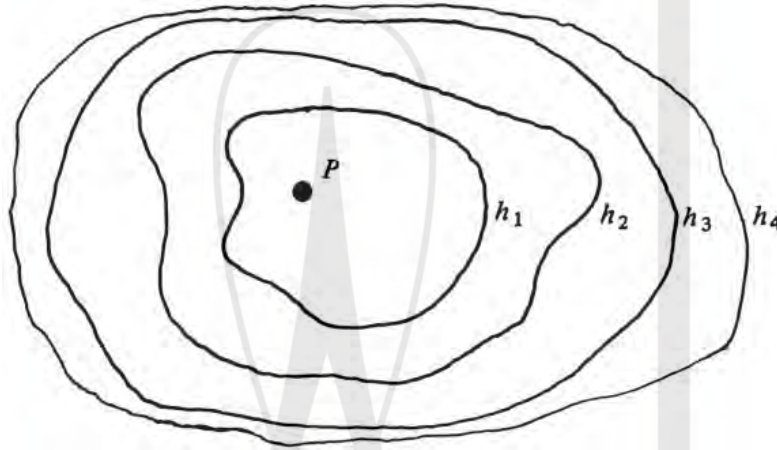


Figura 3.11

Para determinar $S(h)$, debemos buscar en el mapa la curva de nivel correspondiente al nivel h y determinar el área encerrada por esa curva. Se presentan entonces dos problemas: El primero es el calcular $S(h)$ a partir del dibujo. Para esto se necesita aproximar, como ya lo hicimos con el problema de la división de tierras en el fascículo IV, la curva de nivel por una curva que tenga una expresión analítica sencilla de tal modo que se pueda integrar fácilmente. Para ésto, se pueden tomar varios puntos sobre la curva de nivel y aproximar por segmentos, parábolas u otros tipos de curva como ya lo hemos visto en los dos primeros capítulos. En este caso, optaremos por aproximar las curvas de nivel por elipses cuyos semi-ejes $a(h)$ y $b(h)$ son funciones de h y centradas en P (figura 3.12).

La presa es entonces aproximada por un depósito con secciones transversales elípticas con áreas $S(h) = \pi a(h)b(h)$. El volumen de agua hasta el nivel H será:

$$V(H) = \int_0^H S(h) dh = \int_0^H \pi a(h) b(h) dh.$$

El segundo problema es el determinar las funciones $a(h)$ y $b(h)$. Para cada curva de nivel del mapa podemos escoger la elipse correspondiente de tal forma que la diferencia entre las dos áreas no sea demasiado grande. Basta entonces medir las longitudes de los semi-ejes para obtener los valores de $a(h)$ y $b(h)$ correspondientes a esas curvas de nivel. Recordamos que las curvas de nivel

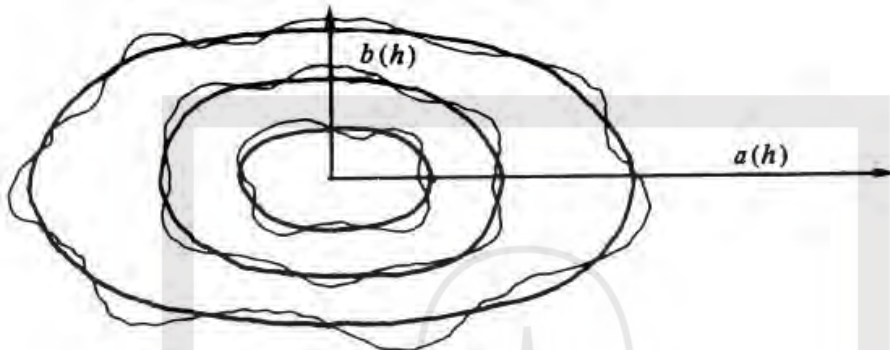


Figura 3.12

corresponden en general a desnivelaciones de 5, 10 ó 50 metros según la escala del mapa; por lo tanto, no se pueden determinar $a(h)$ y $b(h)$ para toda h , menos encontrar una expresión analítica exacta.

Obtendremos por ejemplo las gráficas de la figura 3.13.

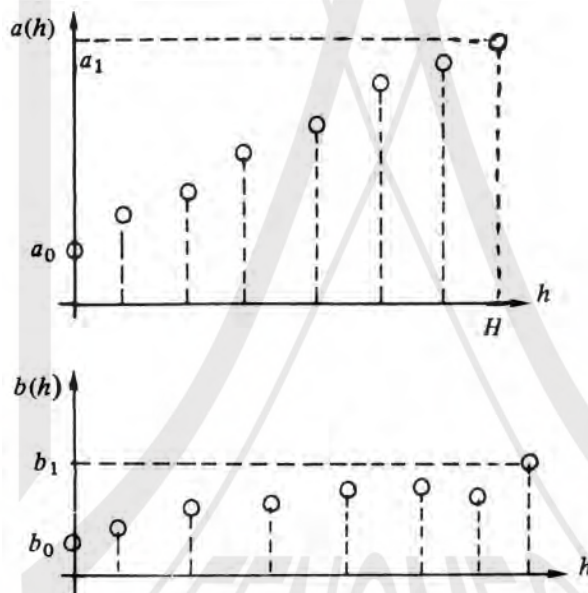


Figura 3.13

La forma de las gráficas depende fuertemente de la topografía del terreno. En la figura $a(h)$ crece más rápidamente que $b(h)$, esto refleja el hecho que en la dirección del semi-eje menor $b(h)$ la pendiente es más fuerte, ya que tenemos

que recorrer menos distancia par elevarnos de la misma altura.

Para encontrar $a(h)$ y $b(h)$ podríamos interpolar linealmente, en el caso de las gráficas dibujadas, uniendo los puntos, pero esto no vale la pena, ya que de todos modos los valores que obtuvimos son aproximados. Como $a(h)$ y $b(h)$ parecen crecer linealmente, tomaremos una sola recta que una $(0, a_0)$ a (H, a_1) para la gráfica de $a(h)$ y, del mismo modo, una recta del punto $(0, b_0)$ al punto (H, b_1) para la gráfica de $b(h)$. (Veremos más adelante una manera más científica de hacer esa aproximación).

$$\text{Entonces :} \quad a(h) = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{H} h; \quad b(h) = b_0 + \frac{b_1 - b_0}{H} h$$

Para determinar el volumen de agua en la presa, cuando ésta llega al nivel h arriba del punto P , usaremos:

$$\begin{aligned} V(h) &= \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \pi a(x) b(x) dx \\ V(h) &= \int_0^h \pi \left(a_0 + \frac{a_1 - a_0}{H} x \right) \left(b_0 + \frac{b_1 - b_0}{H} x \right) dx \\ V(h) &= \pi \left(a_0 b_0 h + \frac{a_0(b_1 - b_0) + b_0(a_1 - a_0)}{2H} h^2 + \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}{3H^2} h^3 \right) \end{aligned}$$

con una capacidad máxima de:

$$V(H) = \frac{\pi H}{6} (a_0 b_1 + a_1 b_0 + 2a_1 b_1 + 2a_0 b_0).$$

En casos concretos podríamos mejorar la aproximación de las curvas de nivel por curvas simples y determinar con mayor precisión las funciones $a(h)$ y $b(h)$ o en general la función $S(h)$. Tenemos las herramientas para hacerlo. Invitamos al lector a que obtenga los datos para una presa real y comparar los resultados con las capacidades publicadas por la C.F.E.

3.4 AJUSTE DE UNA RECTA, REGRESIÓN LINEAL

En muchos experimentos uno consigue datos que parecen estar sobre una recta como en la figura 3.14:

Si uno quiere deducir que $y = ax + b$ como ley experimental, se deben encontrar los coeficientes a y b de la ecuación de la recta. Ahora bien, hay muchas rectas que pueden pasar cerca de estos puntos. Por razones de estadística, teniendo en cuenta los errores experimentales, se escoge la recta de tal forma que la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos experimentales a la recta sea mínima. A este procedimiento se le llama *regresión lineal*.

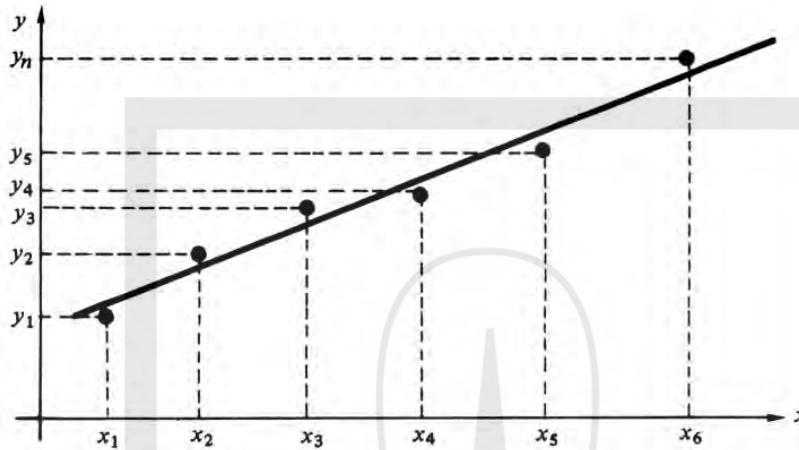


Figura 3.14

Ahora bien, la distancia del punto (x_i, y_i) a la recta $y = ax + b$ es

$$d_i = \frac{|y_i - ax_i - b|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Esto se puede ver de la manera siguiente: La distancia, al cuadrado, del punto (x_i, y_i) al punto $(x, ax + b)$ de la recta es:

$$d^2 = (x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2$$

La distancia de (x_i, y_i) a la recta es el mínimo de d^2 . Como:

$$\frac{d}{dx}((x - x_i)^2 + (ax + b - y_i)^2) = 2((a^2 + 1)x - x_i + ab - ay_i)$$

el mínimo corresponde a

$$x = \frac{x_i + ay_i - ab}{1 + a^2}$$

con

$$y = ax + b = \frac{ax_i + a^2y_i + b}{1 + a^2}$$

y

$$d_i^2 = \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{1 + a^2}$$

como lo podrá comprobar el lector.

Entonces,

$$(1 + a^2)(d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2) = \sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)^2.$$

Si calculamos la derivada de esta expresión con respecto a b , tendremos

$$\sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)$$

la cual será cero, correspondiente a un mínimo en:

$$b = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n} - a \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X},$$

donde

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad \text{y} \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}$$

son los promedios de los valores x_i y y_i respectivamente. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n (b + ax_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a(x_i - \bar{X}) - (y_i - \bar{Y}))^2$$

Como función de a , esta expresión tiene derivada:

$$2 \sum_{i=1}^n (a(x_i - \bar{X}) - (y_i - \bar{Y}))(x_i - \bar{X})$$

$$= 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$$

El mínimo corresponderá al valor:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

En estadística se llama a la cantidad:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \text{ la } \textit{variancia} \text{ de los valores } x_i, \text{ y se escribe } \sigma^2(x).$$

Del mismo modo a $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$, se le llama la *covariancia* de los valores x_i y y_i , escribiéndose $\text{cov}(X, Y)$, entonces:

$$a = \rho \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$$

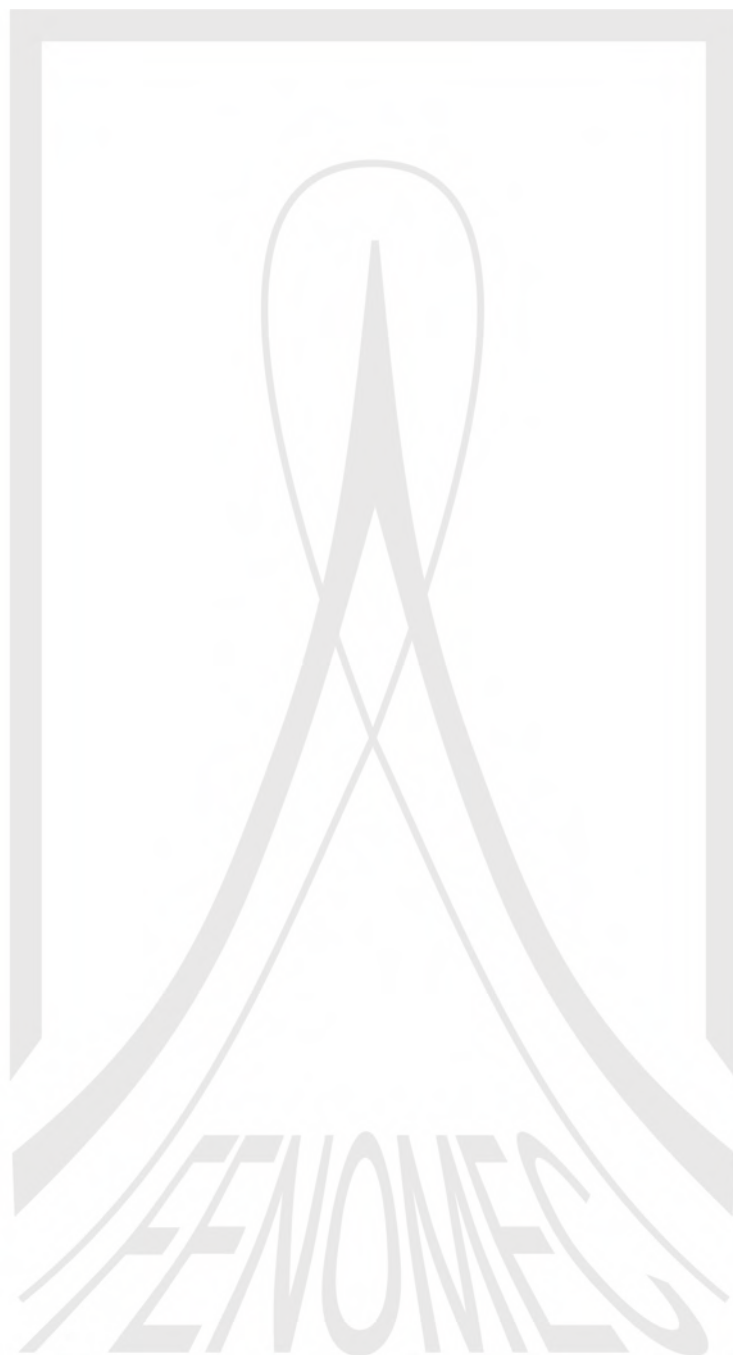
donde ρ , llamado el *coeficiente de regresión*, vale:

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Invitamos al lector a que consulte los fascículos de probabilidad de esta serie para completar sus conocimientos sobre este tema.

CONCLUSIONES

En este capítulo hemos estudiado algunos modelos simples, usando las ideas sobre aproximación desarrolladas en los dos primeros capítulos. Estos modelos son esencialmente de tipo estático. Es decir, no se estudia la evolución en el tiempo de un fenómeno (excepto incidentalmente en la avenida de un río). En el último fascículo de la serie de cálculo estudiaremos movimientos, es decir modelos dinámicos. Matemáticamente, al igual que la parte central de este fascículo fue el estudio y la interpretación geométrica de la segunda derivada, el tema del fascículo VI será la interpretación física de esta derivada. Así pues, si éste último capítulo es una transición entre los dos fascículos del punto de vista de modelos, el aspecto fenomenológico que estudiaremos en el último fascículo es de carácter radicalmente diferente. El haber descubierto esta diferencia es una de las más grandes contribuciones de Newton a la ciencia. Invitamos al lector a volver a consultar la nota bibliográfica sobre Newton que aparece en el fascículo I.



<http://www.fenomec.unam.mx>
www.fenomec.unam.mx

Índice Alfabético

- aceleración, 4
- ajuste, 80
- ajuste de curvas, 65
- algoritmo, 41
- aproximación cuadrática, 34
- aproximación lineal, 2
- arco-seno, 17
- arcocoseno, 18
- arcocotangente, 19
- arcotangente, 17, 69

- cónca, 5
- cero, 41
- coeficiente de regresión, 82
- concavidad, 4, 33
- convexa, 5
- covariancia, 82
- crecimiento exponencial, 37
- criterio de la segunda derivada, 20
- curva en campana, 70
- curva simétrica, 15

- derivada, 3
- distancia, 2
- Don Juvencio, 50

- error, 55, 61

- fórmula de Taylor, 35
- fórmula del error, 30
- función inversa, 14

- ganancias, 66
- gasto hidráulico, 56, 69

- integración numérica, 52
- interpolación, 25

- interpolación lineal, 25

- Lagrange, 36
- ley de Cauchy, 70
- ley de Gauss, 70

- método de Newton, 41
- método de Simpson, 59
- método del punto medio, 57
- método del trapecio, 53

- pendiente, 4
- punto de inflexión, 8

- regla de L'Hôpital, 38
- regresión lineal, 80

- sólido de revolución, 77
- segunda derivada, 3

- Valor medio, 1
- variancia, 82
- velocidad, 2
- volúmenes, 73