CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
Fascículo III
Cálculo de derivadas y algunas aplicaciones

José Luis Abreu
José Ángel Canavati
Jorge Ize
Antonmaría Minzoni

6 de octubre de 2004

PRÓLOGO

En este fascículo se pensó, ante todo, en motivar al alumno a través de un gran número de ejemplos tomados de varias disciplinas. Así pues, además de aprender las reglas de derivación, el estudiante debe aprender a plantear y resolver problemas usando estas reglas. Por lo tanto, desde el principio, tratamos problemas de optimización y cada nueva regla es precedida por un ejemplo donde se ve claramente su necesidad. Después de probar la regla, o más bien de dar una razón para creer en su validez, se plantean problemas parecidos, resueltos o no. Se proponen, además, ejercicios para que el alumno adquiera el automatismo necesario en el cálculo de derivadas, mientras que los problemas deben ser motivadores y servir para entender los conceptos.

Por otra parte, hemos evitado definiciones y tecnicismos matemáticos que tienen su lugar a nivel de la enseñanza superior pero que a estas alturas confunden más que ayudan al alumno. Por lo tanto, sólo se pide que se tenga una idea intuitiva de conceptos como el de límites, dominio de una función, continuidad y otros similares.

Esperamos pues, que el estilo en que está desarrollado este fascículo, de motivación y comprensión intuitiva de conceptos, distinto, por un lado, de la memorización tradicional de fórmulas y por otro del excesivo formalismo, sea lo suficientemente atractivo como para que un texto de matemáticas se vuelva interesante.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La verdadera y triste historia de don Juvencio: un problema de cajas.

En los dos primeros fascículos de esta serie, hemos visto la utilidad de los conceptos de derivada e integral: Por ejemplo, vimos que el cálculo de una derivada permitía encontrar los máximos y mínimos de una función, la pendiente de la tangente a una gráfica, la velocidad de un punto móvil, etc.

Quizás algunos de los lectores no estén convencidos todavía y pensarán que con una computadora y un poco de paciencia bastaría calcular muchos puntos sobre una gráfica para darse cuenta del comportamiento de una función, sobre todo si uno se interesa solamente en los resultados prácticos del cálculo diferencial e integral.

Para convencernos de lo contrario tomaremos un ejemplo de cajas muy parecido al problema visto en el fascículo I:

Esta es la verdadera y triste historia de don Juvencio López y su negocio de Transportes en General, S. A.

Don Juvencio es transportista. Empaca la mercancía en cajas de cartón compradas a 6 pesos cada una y le cobra al cliente el precio de la caja y 10 pesos por metro cúbico empacado: A centavo el litro, o dm^3 , como dice el letrero en el negocio de don Juvencio. Las cajas están hechas de una hoja de cartón de $1.10 \times 1.10m^2$, doblada según las lineas punteadas de la figura 0.1:
Queda una caja de lados a y b y alto x. Cada esquina es reforzada por una cuña de cartón de alto x y ancho $2.5cm$, dato que usaremos más adelante.

Como don Juvencio cobra un centavo por dm^3, pondremos todos nuestros datos en esas unidades (y para no equivocarnos). De la figura 0.1 se ve que:

$$b + 2x = 11dm \text{ y } 2a + 2x = 11dm.$$

por lo tanto

$$a = \frac{11 - 2x}{2}, \quad b = 11 - 2x = 2a$$

y como a, b y x deben ser positivos, $0 < x < 5.5$. (Véase el apéndice sobre desigualdades del fascículo II).

Como es bien sabido, el volumen, $V(x)$, de la caja será

$$V(x) = abx = \frac{x}{2}(11 - 2x)^2 = 2x^3 - 22x^2 + \frac{121}{2}x.$$

Ahora bien, como el cliente paga $600 + V(x)$ (centavos) y la ganancia de don Juvencio es de $V(x)$ centavos, a ambos les interesa que el volumen de cada caja

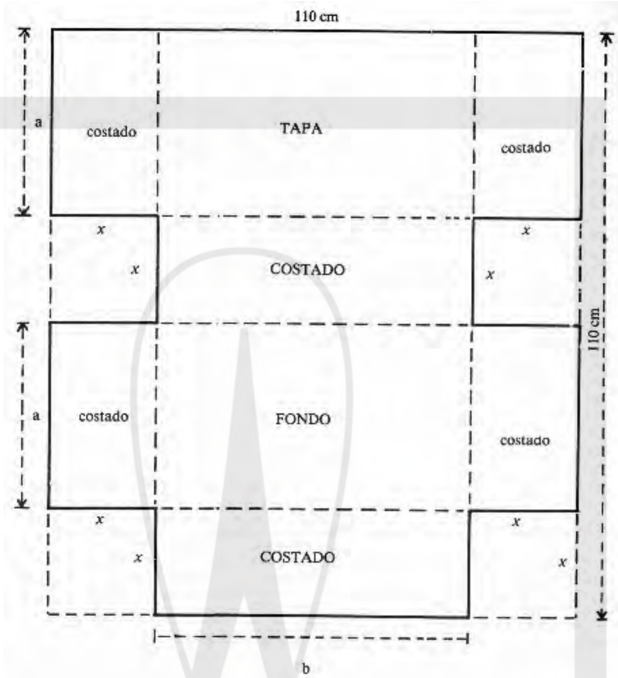

Figura 0.1

sea el mayor posible. El problema es pues encontrar las dimensiones óptimas, en particular la altura x, para tener mayor volumen.

Don Juvencio hizo unas cuentas y encontró la siguiente tabla de volúmenes y su correspondiente gráfica (figura 0.2):

Con la gráfica, don Juvencio se dio cuenta de que el máximo estaba en x cercano a 2. Para $x = 2$ el cliente pagará 6.49 pesos por 49 dm^3 empacados y don Juvencio tendrá una ganancia de 49 centavos. Además, don Juvencio se dio cuenta de que hubiera podido ahorrarse mucho trabajo calculando el valor de $V(x)$ para x igual a 1, 3 y 5 y completar la gráfica adivinándola. Este fue su fatal error como lo veremos más adelante.

Don Juvencio estaba listo para desarrollar esta nueva idea cuando pensó que al cliente no le gustaría pagar tanto dinero por la caja. Entonces dijo, voy a reducir el precio haciendo las cajas yo mismo y de paso elimino un intermediario: Así la caja le saldrá más barata al cliente y yo podré incrementar mis ganancias y recuperar el cartón no utilizado en cada caja para hacer cajas más chicas.

Don Juvencio se informó y encontró los siguientes precios:

- *Precio de la hoja de cartón*: 4 pesos el metro cuadrado: como la hoja mide $1.1 \times 1.1 m^2$, la hoja le cuesta: $1.21 \times 4 = 4.84$ pesos.

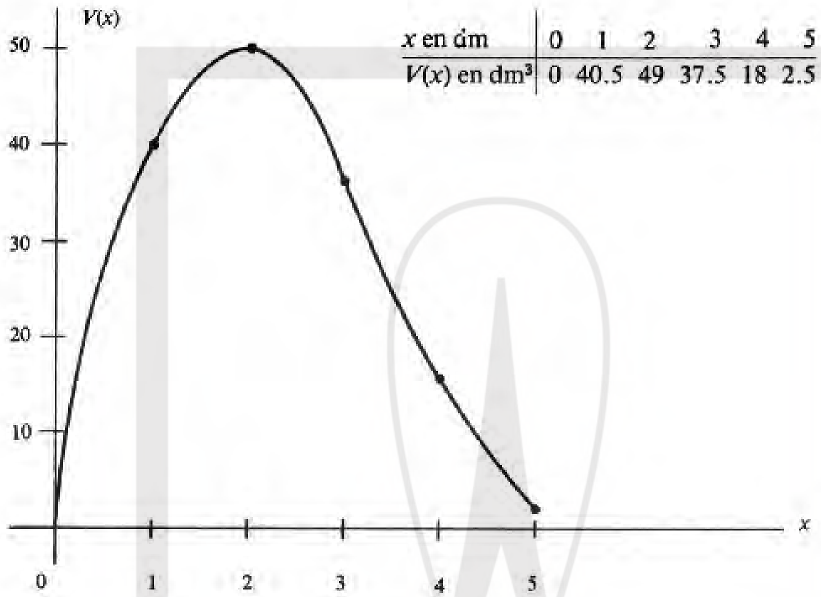

Figura 0.2

- *Mano de obra*: para la hechura de cada caja: 16 centavos.
- *Costo total de cada caja*: $484 + 16 = 500$ centavos.

El intermediario ganaba un peso por caja y don Juvencio podría ganar, con los mismos precios, 1.49 por caja y el cartón no utilizado.

Queriendo atraer más clientes, don Juvencio decidió cambiar radicalmente sus precios cobrando menos por la caja y más por el transporte. Después de pensarlo mucho, don Juvencio puso el siguiente anuncio:

"1 peso por caja y 8 centavos por dm^3 empacado".

No diremos las razones de este precio ya que forman parte de la psicología de las ventas y no de las matemáticas. Sigamos con nuestra historia. Don Juvencío decidió entonces usar sus conocimientos matemáticos y su exitosa experiencia pasada para hacer un estudio científico de su negocio:

- *Área usada de cartón*: $121 - 4x^2 + x$: El término $4x^2$ corresponde a las áreas de las cuatro esquinas y el término x al área de las cuñas: 4 cuñas de $0.25x$ de área cada una.
- *Costo del cartón usado*: $4(121 - 4x^2 + x)$ (4 centavos el decímetro cuadrado).

- *Costo total*: (Material y mano de obra): $4(121 - 4x^2 + x) + 16$.
- *Precio de venta*: $100 + 8V(x)$.
- *Ganancias*: Venta menos costo: $G(x) = 100+8V(x)-4(121-4x^2+x)-16$. $G(x) = 16x^3 - 160x^2 + 480x - 400 = 16(x^3 - 10x^2 + 30x - 25)$.

Para ahorrarse trabajo, don Juvencio calculó $G(x)$ para $x = 1$, 3 y 5:

$$G(1) = -64, \quad G(3) = 32, \quad G(5) = 0.$$

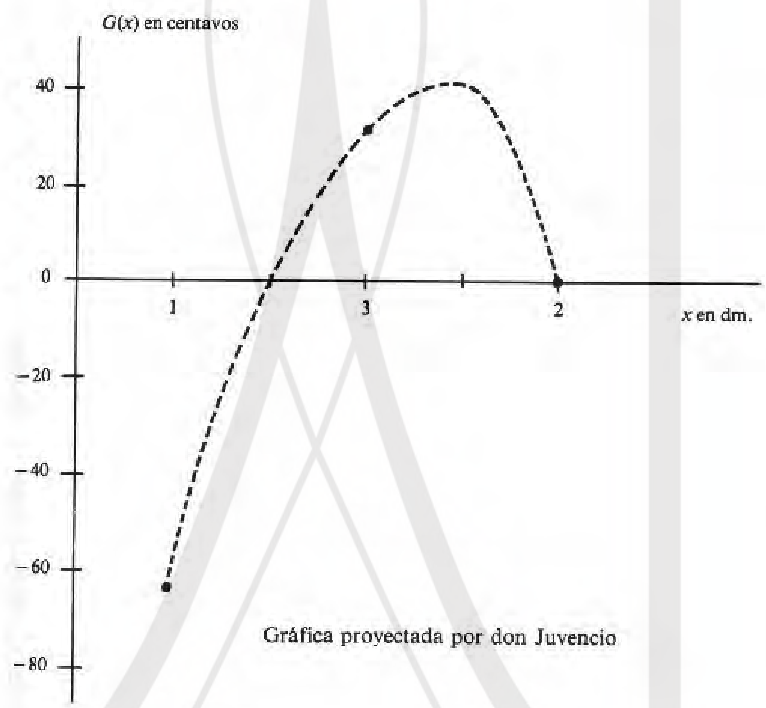

Figura 0.3

Entonces, pensó : la ganancia máxima es para x cerca de 4 y vale por lo menos 40 centavos para una caja de 18 dm^3 . Para un volumen de 49 dm^3 empacados, daría, por la regla de tres, una ganancia de $40 \times \frac{49}{18} \simeq 109$ centavos, es decir 60 centavos más que antes. El cliente, al pagar por $18dm^3$ el precio de $100 + 8 \times 18 = 244$ centavos, pagaría por $49dm^3 = 244 \times \frac{49}{18} \simeq 664$ centavos, un poco más que antes (649 centavos) pero con más cajas: “2.7” cajas en lugar de una, lo cual puede ser un buen argumento para convencer al cliente de que también sale ganando.

Entusiasmado, don Juvencio puso en marcha su nueva política de precios. Al cabo de un mes se dio cuenta de que en lugar de ganar dinero ¡estaba perdiendo sobre cada caja!

La primera cosa que hizo don Juvencio fue verificar sus cálculos. Encontró los siguientes valores y la correspondiente gráfica.

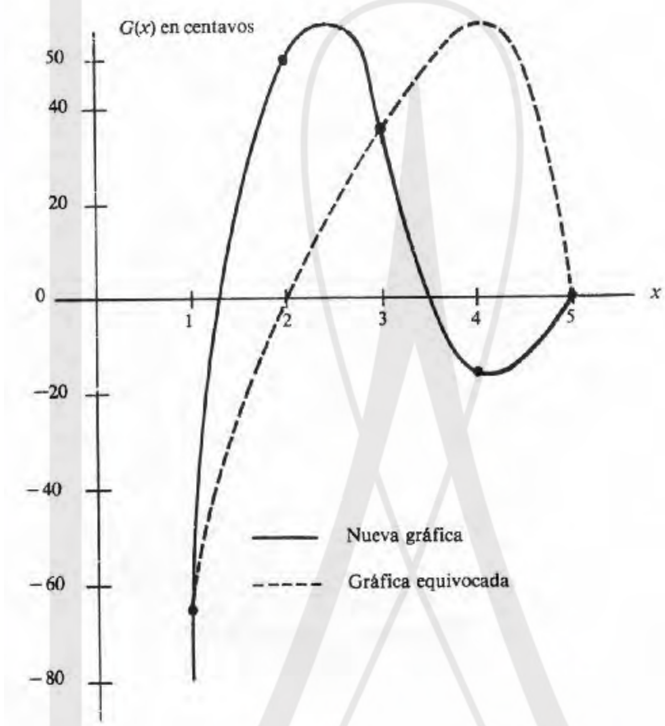

Figura 0.4

x en dm	0	1	2	3	4	5
$V(x)$ en dm^3	0	40.5	49	37.5	18	2.5
$G(x)$ en centavos	-400	-64	48	32	-16	0
Precio de venta	100	424	492	400	244	120
Precio por 49 dm^3 empacados	?	513	492	523	664	2352
Ganancia por 49 dm^3 empacados	?	-77.4	48	41.8	-43.6	0

El precio de venta $P(x)$ es $8V(x) + 100$, el precio por 49 dm^3 empacados es $P(x)\dfrac{49}{V(x)}$ y la ganancia por 49 dm^3 empacados es $G(x)\dfrac{49}{V(x)}$.

Entonces al escoger $x = 4, G(x)$ estaba más bien cerca del mínimo negativo, y por lo tanto una pérdida, que del máximo. Parece que el máximo está entre 2 y 3. Pero, pensó don Juvencio, ¿qué tal si al escoger $x = 2.5$ no le sale otro chipotito a la gráfica y sigo perdiendo?

Figura 0.5

Muy preocupado pero decidido a sacar la máxima ganancia, don Juvencio reunió a su familia y les expuso el problema.

El hijo, Carlos, preparatoriano y enterado de las cosas del cálculo diferencial, le dijo: "Es muy fácil papá: ¿quieres encontrar el máximo y el mínimo de tu función ganancia $G(x)$? ¿Te interesa también encontrar la ganancia máxima por 49 dm^3 empacados o sea estudiar la función $G(x)\frac{49}{V(x)}$?

Finalmente, si quieres que el cliente quede contento empacando más en cada caja, debes encontrar el máximo de $V(x)$, (el cliente pagará más, ya que $P(x) = 100 + 8V(x)$ será también máximo). Por fin si el cliente quiere pagar menos por 49 dm^3 empacados, se debe encontrar el mínimo de $P(x)\frac{49}{V(x)}$.

Si me esperas un par de minutos te traigo las respuestas"

Sintiéndose muy importante, Carlos regresó con estos resultados:

- $G(x)$ es *máximo* para x cerca de 2.25 (De hecho en $\dfrac{10-\sqrt{10}}{3}$).

- $G(2.25) = 52.25$ centavos (De hecho $G\left(\dfrac{10-\sqrt{10}}{3}\right) = 52.3$).

$V(2.25) = 47.53 \text{ dm}^3$

$P(2.25) = 480$ centavos

$G(2.25) \quad \frac{49}{V(2.25)} = 53.9$ centavos.

- $G(x)$ es *mínimo* para $x = \dfrac{10+\sqrt{10}}{3}$, cerca de 4.4, con $G\dfrac{(10+\sqrt{10})}{3} \cong -22.7$.

- $\dfrac{G(x)49}{V(x)}$ es *máximo*, para x entre 1 y 5, para x cerca de 2.4 con valor en 2.4 de 54.8 centavos.

  $V(2.4) = 46.13 \text{ dm}^3$.

- $\dfrac{G(x)49}{V(x)}$ es *mínimo*, para x entre 1 y 5, para x cerca de 4.7 con valor -140.

  Se estudió esta última función en ese intervalo, ya que tiende a $-\infty$ si x tiende a cero y a ¡$+\infty$ si x tiende a 5.5: $V(x)$ es 0 en esos valores.

- $V(x)$ es *máximo* en $\dfrac{11}{6}$ con $V\left(\dfrac{11}{6}\right) = \left(\dfrac{11}{6}\right)^3 \cong 49.3 \text{ dm}^3$.

- $\dfrac{P(x)49}{V(x)}$ es *mínimo*, y no es coincidencia, para $x = \dfrac{11}{6}$ con valor 491.4 centavos

- $G\left(\dfrac{11}{6}\right)\dfrac{49}{V\left(\frac{11}{6}\right)} = 40.6$ centavos.

¡Tú escoges papá!

A lo largo de este fascículo veremos cómo Carlos sacó todas sus conclusiones; pero por el momento podemos imaginarnos, fácilmente lo que hizo: al leer los dos primeros fascículos de esta serie, se dio cuenta de que lo que importa al graficar una función no es tanto encontrar el valor exacto de la función en cada punto, lo cual es en general imposible, sino el comportamiento general de la función: ¿cuándo crece?, ¿cuándo decrece?, ¿cuándo hay un máximo, un mínimo o en ciertos casos un cero? Y que la herramienta adecuada para ese problema es el estudio de la derivada: *la función crece si la pendiente de la tangente es positiva y decrece si la pendiente es negativa.* Lógicamente, en un máximo, la pendiente debe ser cero: la tangente es horizontal (por lo menos en los casos en que existe dicha tangente).

Recordemos que la pendiente de la tangente, la derivada de la función, se define como:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$f'(x_0)$ es también una función: depende del punto x_0.

Recordemos también que, en el fascículo II, calculamos las derivadas de algunas funciones:

$$\frac{d}{dx}(1) = 0,\ \frac{d}{dx}(x) = 1,\ \frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \text{ y en general}$$
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \text{ para } n \text{ positivo o negativo.}$$
$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax},\ \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Calculemos pues, en el problema de don Juvencio, la derivada de

$$V(x) = 2x^3 - 22x^2 + \frac{121}{2}x$$

$$V(x+h) - V(x) = 2(x+h)^3 - 2x^3 - 22(x+h)^2 + 22x^2 + \frac{121}{2}(x+h) - \frac{121}{2}x$$

Desarrollando los productos tenemos:

$$V(x+h) - V(x) = 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 44xh - 22h^2 + \frac{121}{2}h$$

y

$$\frac{V(x+h) - V(x)}{h} = 6x^2 - 44x + \frac{121}{2} + h(6x + 2h^2 - 22h)$$

por lo tanto, cuando h tiende a cero:

$$V'(x) = 6x^2 - 44x + \frac{121}{2}$$

Se deja como ejercicio el comprobar que el polinomio de segundo grado $6x^2 - 44x + \frac{121}{2}$ tiene ceros en $x_1 = \frac{11}{6}$ y $x_2 = \frac{11}{2}$ y que por lo tanto $V'(x) = 6\left(x - \frac{11}{6}\right)\left(x - \frac{11}{2}\right)$.

Además si hacemos la gráfica de la parábola $y = 6x^2 - 44x + \dfrac{121}{2}$ vemos que para x menor que $\frac{11}{6}$, $V'(x)$ es positiva y por lo tanto $V(x)$ es creciente; también para x entre $\dfrac{11}{6}$ y $\dfrac{11}{2}$, $V'(x)$ es negativa y $V(x)$ decrece en ese intervalo, mientras que para x mayor que $\dfrac{11}{2}$, $V'(x)$ es positiva y por lo tanto $V(x)$ crece.

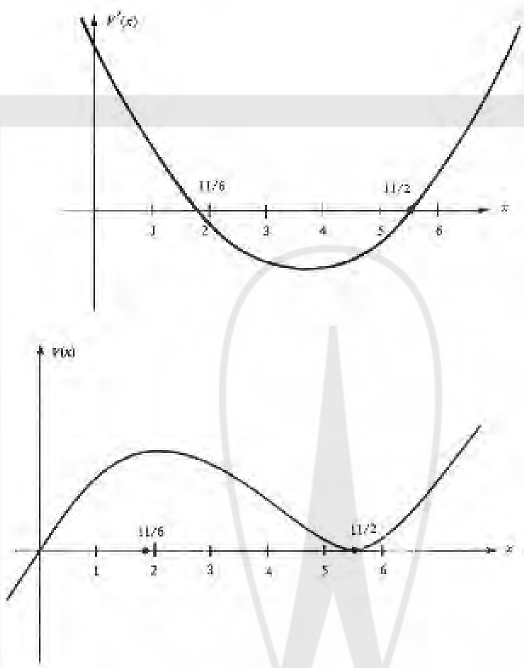

Figura 0.6

Entonces en $11/6, V(x) = (11/3)^3$, corresponde a un máximo de $V(x)$ y en $11/2, V(x) = 0$, corresponde a un mínimo de $V(x)$.

Ahora hay algo que debemos notar: como se vio en el fascículo II, la derivada de $2x^3$ es $6x^2$, la de $-22x^2$ es $-44x$ y la de $\frac{121}{2}x$ es $\frac{121}{2}$. Entonces vemos que la derivada de $V(x)$ es la suma de las derivadas de cada término componiendo a $V(x)$. Si esto es cierto en general, en lugar de tener que calcular la derivada de $V(x)$ como lo hicimos, podríamos ahorrarnos trabajo usando la suma de las derivadas. Esta regla, y algunas más, son el objeto de la primera parte de este fascículo.

EJERCICIOS:0.1

Verifique los cálculos algebraicos y numéricos anteriores y hacer la gráfica de las distintas funciones del problema de don Juvencio.

Capítulo 1

REGLAS DE DERIVACIÓN

1.1 DERIVADA DE UNA SUMA

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones:

Si tenemos $F(x) = f(x) + g(x)$ entonces:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(h)}{h}$$

Al tomar el límite de cada lado cuando h tiende a cero, vemos que si f y g tienen derivadas en x:

$$\boxed{F'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Por ejemplo, en el problema de don Juvencio donde tenemos una suma de tres funciones:

$$\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 22x^2 + \frac{121}{2}x\right) \\
&= \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(22x^2) + \frac{d}{dx}\left(\frac{121}{2x}\right) \\
&= 6x^2 - 44x + \frac{121}{2}.
\end{aligned}$$

Aquí usamos algo muy simple pero que no hemos probado:

$$\frac{d}{dx}(2x^3) = 2\frac{d}{dx}(x^3),\ \frac{d}{dx}(22x^2) = 22\frac{d}{dx}(x^2),\ \frac{d}{dx}\left(\frac{121}{2}x\right) = \frac{121}{2}\frac{d}{dx}(x),$$

y en general si c es una constante:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

De hecho: $\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y tomando límites tenemos ese resultado.

EJERCICIOS:

1.1) En el problema de la caja del fascículo I el volumen estaba dado por: $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$. Encuentre $V'(x)$ y estudie su signo: donde $V(x)$ es creciente y donde es decreciente.

1.2) En el problema de optimización de ganancias del fascículo I, la ganancia estaba dada por $G(p) = -18p^2 + 10200p - 1375000$. Estudie $G'(p)$ como en el ejercicio anterior.

1.3) En el problema del pastizal de don Agapito del fascículo II, la longitud de la barda estaba dada por: $l(x) = +\dfrac{4000}{x}$. Estudie $l'(x)$.

Ejemplo 1.1: las cubetas

Un fabricante de cubetas hace sus recipientes de lámina de forma cilíndrica como lo indica la figura 1.1. Un cliente le pide que contengan 27 litros y evidentemente el cliente quiere que se gaste lo mínimo para lámina: la superficie de la cubeta debe ser la más pequeña posible.

La superficie de lámina usada corresponde parte a la superficie lateral: $2\pi rh$, y parte a la superficie del fondo: πr^2; es decir:

Superficie $= 2\pi rh + \pi r^2 = S$

Ahora como el volumen del cilindro $\pi r^2 h$ debe ser 27 (aquí debemos tener cuidado de expresar todas las longitudes en dm, ya que el volumen está dado en litros o sea dm^3):

$$h = \frac{27}{\pi r^2};\ S(r) = \frac{54}{r} + \pi r^2$$

Si primero hacemos la gráfica de la parábola $y_1 = \pi r^2$ (figura 1.2) y después la hipérbola $y_2 = \frac{54}{r}$ vemos que, para cada $r, S(r)$ es la suma de $y_1(r)$ y de $y_2(r)$:

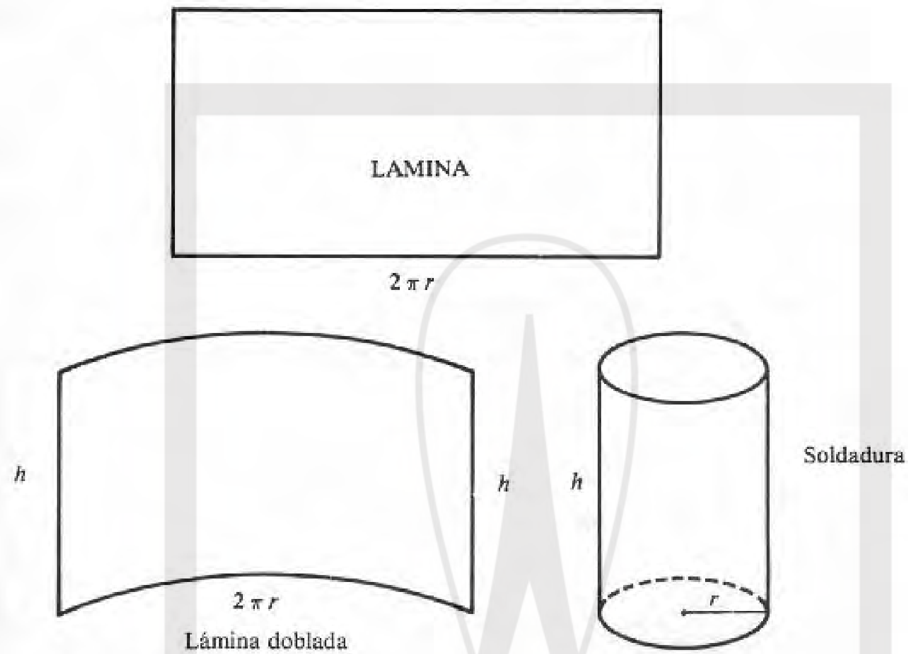

Figura 1.1

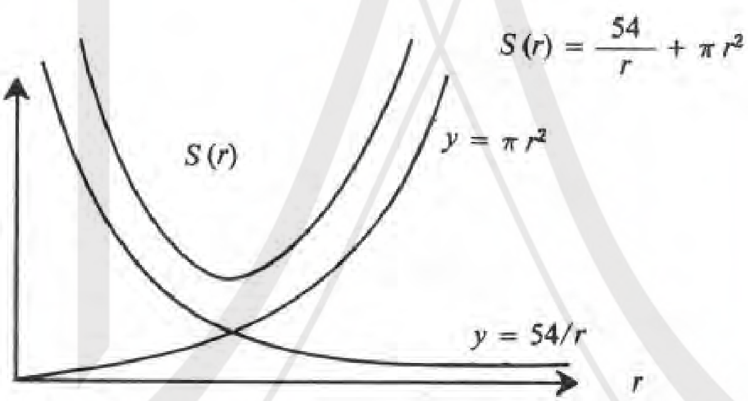

Figura 1.2

para encontrar la gráfica de $S(r)$ basta sumar para cada r las ordenadas y_1 y y_2.

De la gráfica se ve que $S(r)$ tiene un mínimo, lo cual comprobaremos calculando la derivada:

$$\begin{aligned} S'(r) &= (\pi r^2)' + \left(\frac{54}{r}\right)' = \pi(r^2)' + 54\left(\frac{1}{r}\right)' = 2\pi r - \frac{54}{r^2} \\ S'(r) &= \frac{2\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{27}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S'(r)$ vale cero para $r_0 = \left(\frac{27}{\pi}\right)^{1/3} = \frac{3}{\pi^{1/3}}$ y $S'(r)$ será negativa para r menor que r_0 y positiva para r mayor que r_0: tenemos un mínimo en r_0,

$$\begin{aligned} S(r_0) &= \pi r_0^2 + \frac{54}{r_0} = \frac{9\pi}{\pi^{2/3}} + \frac{54\pi^{1/3}}{3} = 27\pi^{1/3} \\ h_0 &= \frac{27}{\pi r_0^2} = \frac{27}{\pi(27/\pi)^{2/3}} = \left(\frac{27}{\pi}\right)^{1/3} = r_0 \end{aligned}$$

Como $\pi^{1/3} \cong 1.46$ entonces $r_0 = h_0 \cong 2.05dm = 20.5cm$ y $S(r_0) \cong 39dm^2$.

Problema 1.1:

Un fabricante de latas de aluminio debe hacer latas cilíndricas con capacidad de un litro y quiere usar la superficie mínima. Encontrar las dimensiones y la superficie correpondiente. No olvide que las latas tienen tapa y fondo.

Ejemplo 1.2: Planeación de costos

Para el propietario de una tienda es importante saber manejar los costos, pensar en inventarios, producción, distribución, mercado, publicidad, etc... y el problema de abastos. Tomemos un ejemplo para explicar de qué se trata: un comerciante vende 1 200 coches al año, a razón de 100 al mes, (supondremos que no hay fluctuaciones en las ventas para simplificar el modelo); recibe los coches en lotes de 200 cada dos meses y los almacena en un estacionamiento mientras los vende. Ahora bien, el comerciante podría ahorrarse el gasto de estacionamiento pidiendo los coches uno por uno, pero entonces tendría que pagar 1 200 veces el transporte por camión o por tren. También podría ordenarlos todos de una sola vez, pagando un solo transporte, pero tendría que pagar más estacionamiento. El problema es encontrar un término medio entre los costos de almacenamiento y de pedido, minimizando el costo total.

Para tener un modelo general, supondremos que el comerciante vende N unidades en el curso del año y que ordena lotes de x vehículos en $\frac{N}{x}$ pedidos al año, o sea en doce meses. Como las ventas son constantes, tendrá que hacer sus pedidos cada $\frac{12x}{N}$ meses: por ejemplo si N es 1 200 y x es 200, habrá seis pedidos, uno cada dos meses (figura 1.3).

A la llegada de un pedido, todos los x vehículos son almacenados hasta que al cabo de $\frac{12x}{N}$ meses se vendieron todos a una velocidad constante.

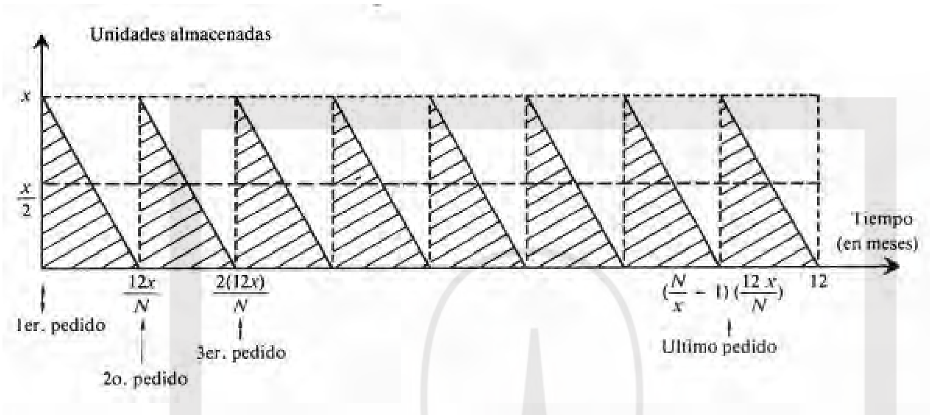

Figura 1.3

Notemos que la gráfica fue dibujada como si el número de vehículos almacenados estuviera variando de manera continua. Podemos decir que es prácticamente cierto si N es grande ya que un cambio de una unidad casi no se notará. Solamente tendremos que ser cuidadosos en la interpretación de los resultados al no pedir un medio coche. (Recordemos que ya encontramos este razonamiento en el fascículo II en el problema de las poblaciones).

Ahora bien, de la gráfica se ve que hay un promedio de $\frac{x}{2}$ unidades almacenadas en todo momento ya que el número total de vehículos estacionados durante todo el año corresponde a la suma de las áreas de los triángulos achurados (con líneas transversales).

Entonces, si el costo de almacenamiento de un vehículo por año es de A pesos, el costo anual de almacenamiento C_A será:

$$C_A(x) = A\frac{x}{2}$$

Por otra parte, el costo de los pedidos $C_p(x)$ será el costo de cada pedido por el número de pedidos $\frac{N}{x}$. Hay que notar que el costo por pedido consta de un costo fijo (correspondencia, gasolina de los camiones, contribuciones "voluntarias"a la policía de caminos, etc...) y un costo variable según el número de vehículos transportados (seguros, sueldos de los choferes, etc...).

Llamaremos B al primer costo y C al costo por unidad del segundo: el costo por pedido será pues: $B + Cx$ y

$$C_p(x) = (B + Cx)\frac{N}{x} = \frac{BN}{x} + NC$$

Por lo tanto, el costo total será:

$$C(x) = C_A(x) + C_p(x) = NC + \frac{A}{2}x + \frac{NB}{x}$$

Derivando cada término y sumando tendremos:

$$C'(x) = \frac{A}{2} - \frac{NB}{x^2} = \frac{A}{2x^2}\left(x^2 - \frac{2NB}{A}\right)$$

$C'(x)$ será cero para $x_0 = \sqrt{\frac{2NB}{A}}$, negativa para x menor que x_0 y positiva para x mayor que x_0: por lo tanto en $x_0, C(x)$ es mínima.

$$C(x_0) = NC + \sqrt{\frac{ABN}{2}} + \sqrt{\frac{ABN}{2}} = NC + \sqrt{2ABN}$$

Por ejemplo, si $N = 1200, A = 1200$ pesos al año, $B = 200$ pesos y $C = 40$ pesos: $C(x_0) = 96000$ pesos anuales pidiendo lotes de $x_0 = 20$ vehículos cada $1/5$ mes o sea aproximadamente cada 6 días, aplicando las fórmulas.

Notemos que si las ventas se duplican, el número de autos vendidos al año es $2N$, entonces el número óptimo de vehículos de un lote será $\sqrt{2}x_0$ y no $2x_0$ como se podría pensar.

Finalmente recalquemos que este modelo requiere de una venta constante a lo largo del año (no es válido para tarjetas de navidad) y además no importa el tiempo de almacenamiento (no es válido para jitomates).

Problema 1.2:

Una tienda vende 10 000 jabones al año. El costo de almacenamiento es de 250 pesos anuales por millar. El costo variable de pedido es de 200 pesos el millar y el costo fijo de pedido es de 100 pesos. ¿Cuántos pedidos por año y de qué tamaño se deben hacer para minimizar los costos?

Problema 1.3:

Debido a la inflación, los costos de almacenamiento y de pedido han aumentado un 6% y las ventas han bajado un 19%. Exprese el tamaño óptimo de cada nuevo lote en función del anterior.

Ejemplo 1.3: El hombre, la casa y el lago

Un hombre está tomando el sol a la orilla de un lago circular de radio r en un punto opuesto a su casa (figura 1.4)

De pronto advierte que su casa se quema. Tienen que llegar a ella lo más rapidamente posible. Puede nadar y sabe que lo puede hacer con una velocidad V_2, o puede correr en el pedregal alrededor del lago con velocidad V_1 o puede correr un rato y nadar después: ¿cuál es la mejor estrategia? (figura 1.5)

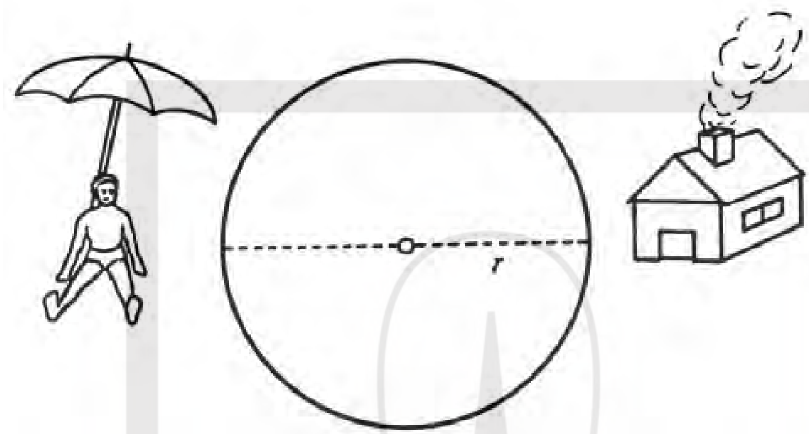

Figura 1.4

Por ejemplo, si corre de A a B se tardará: $t_1 =$ (longitud del arco $AB)/V_1$ y si nada de B a C se tardará: $t_2 =$ (longitud de la recta $BC)/V_2$.

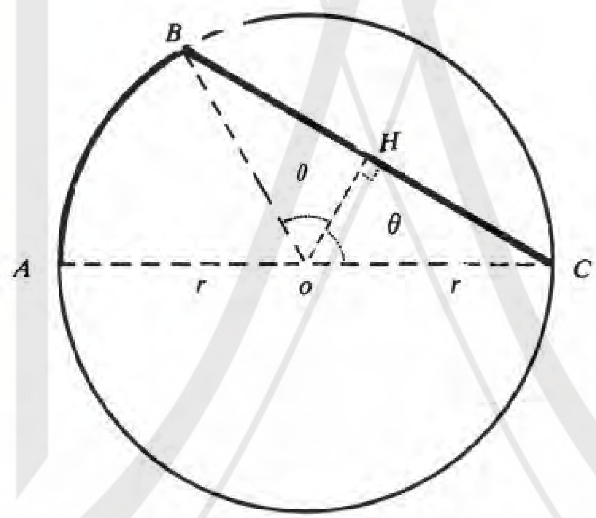

Figura 1.5

Como sabemos que la longitud del arco AC, mitad de la circunferencia, es πr, la longitud de AB será proporcional al ángulo $\pi - 2\theta$.

Longitud de $AB : (\pi - 2\theta)r$

Por otra parte: $BC = 2HC = 2r \text{ sen } \theta$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
t(\theta) &= t_1 + t_2 = \frac{r}{V_1}(\pi - 2\theta) + \frac{2r}{V_2}\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dt}{d\theta} &= -\frac{2r}{V_1} + \frac{2r}{V_2}\cos\theta \quad \text{aplicando la regla de suma} \\
\frac{dt}{d\theta} &= \frac{2r}{V_2}\left(\cos\theta - \frac{V_2}{V_1}\right) \text{ donde } \theta \text{ varía entre } 0 \text{ y } \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Si $V_2 > V_1$, entonces como $\cos\theta$ está entre 0 y 1 tenemos $\cos\theta - \frac{V_2}{V_1} < 0$ y $\frac{dt}{d\theta}$ es negativa: t es decreciente y t es mínimo para $\theta = \frac{\pi}{2}$ en este caso conviene más nadar todo el tiempo.

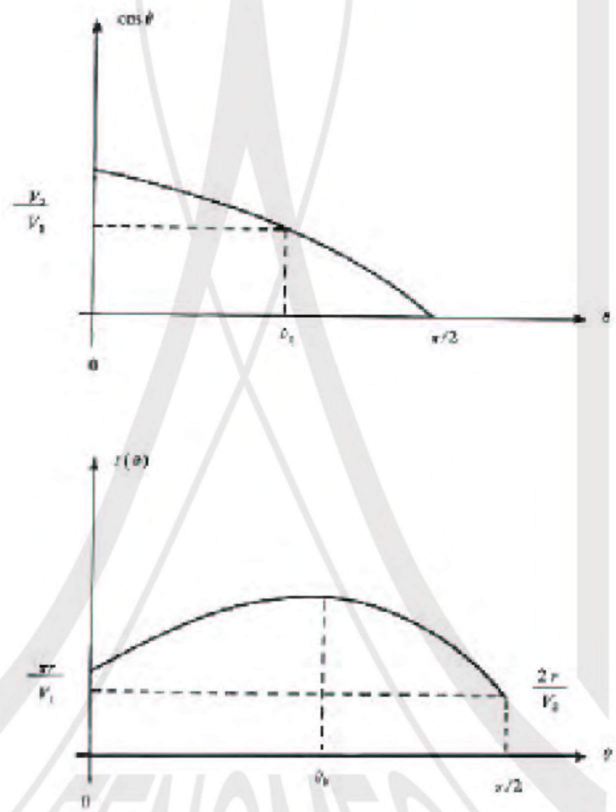

Figura 1.6

Si $V_2 < V_1$, de la gráfica (figura 1.6) de $\cos\theta$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ vemos que para θ entre 0 y θ_0, $\frac{dt}{d\theta}$ es positiva y t es creciente y para θ entre θ_0 y $\frac{\pi}{2}$, $\frac{dt}{d\theta}$ siendo negativa t es decreciente y θ_0 corresponde a un máximo de t.

Por lo tanto en este caso $V_2 < V_1$, el mínimo de $t(\theta)$ será para $\theta = 0$ o $\theta = \frac{\pi}{2}$ según los valores de $t(0)$ y $t(\pi/2)$:

Si $\frac{\pi r}{V_1} = t(0)$ es menor que $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2r}{V_2}$ o sea si $\frac{V_1}{V_2} > \frac{\pi}{2}$ conviene más nadar todo el tiempo.

EJERCICIOS:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones usando la definición y verifique la regla de la suma:

1.4) $f(x) = x^3, g(x) = 2x + 1$. Calcule $f'(x), g'(x), (f+g)'(x)$.

1.5) $h(x) = \dfrac{1}{S}, k(s) = s^2 - 1$. Calcule $k'(x), (h+k)'(s)$. Además estudie el signo y los ceros de $(h+k)'(s)$.

1.6) $p(t) = 3t^2 - 2t - 1, q(t) = t^2 + 1$. Calcule $p'(t), q'(t), (p+q)'(t), (p-q)'(t)$.

1.7) Calcule las derivadas de: $\operatorname{sen} x + \cos x, \cos x + 2 \operatorname{sen} x, x + \cos x$. En este último caso estudie el signo y los ceros de la derivada.

Problema 1.4:

Una tienda pone un anuncio en un periódico de 10 cm $\times$ 40 cm y paga según la superficie del anuncio. Todo anuncio requiere de un margen de 2 cm en cada lado que también se pagan. ¿Si la tienda cambia la forma de su rectángulo, podrá aumentar el área y pagar lo mismo? (Exprese que, si x y y son los lados del rectángulo, el área total es de 400 cm^2 y que el área escrita es $(x-4)(y-4)$.)

Problema 1.5:

Un pastizal de 20 000 m^2 sostiene a 20 vacas. Cada vaca tiene una producción diaria de 10 litros de leche. Al introducir una nueva vaca en el pastizal el rendimiento de cada vaca baja en un litro. ¿Cuál es el número de vacas que hay que poner para tener una producción máxima? (Tome x como el número de vacas adicionales y encuentre una expresión en x para la producción de leche. ¡Note que no se puede cortar una vaca en dos al interpretar el resultado matemático!).

Problema 1.6:

Una compañía camionera hace viajes especiales de México a Tijuana. El número mínimo de pasajeros debe ser 80 y el pasaje cuesta 210 pesos por persona. Pero la compañía ofrece una rebaja de un peso sobre cada pasaje por cada nuevo pasajero que exceda a 80. ¿Cuál es el número de pasajeros que da la ganancia óptima a la compañía?

EJERCICIOS:

1.8) Calcule y estudie, en el problema de don Juvencio, la derivada de $G(x)$.

1.9) Calcule las derivadas de:

a) $y = 4x^2 - x$

b) $y = 2x - \dfrac{1}{x^4}$

c) $y = 3x + 4x^3 - 5x^8$

d) $y = x^{10} - x^{20}$

e) $y = x^{-1} - x^{-2} - x^{-3}$

f) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
(coseno hiperbólico y seno hiperbólico respectivamente).

1.10) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada, en el punto especificado:

a) $y = x - 3x^2 - 4x^3$ en $x = 1$

b) $y = x^{-1} + 3x^2$ en $x = -1$

c) $y = 5x + 3x^2 - \dfrac{1}{x}$ en $x = 1$

d) $y = (7x + 1)^2$ en $x = 0$

1.2 DERIVADA DE UN PRODUCTO

Ya hemos visto que $(cf)' = cf'$ y nos gustaría poder calcular la derivada de un producto de funciones $f(x)g(x)$ ya que en varios de los ejemplos anteriores tuvimos que desarrollar los productos y calcular entonces la derivada para después tener que factorizar de nuevo para estudiar el signo. Proponemos también al lector que calcule, a partir de la definición, la derivada de $x^2 \operatorname{sen} x$. Veamos por ejemplo, en el problema de don Juvencio, la función $V(x) = \frac{x}{2}(11 - 2x)^2$ que podemos escribir como:

$$\left(\frac{11}{2}x - x^2\right)(11 - 2x)$$

Ahora:

$$V(x) - V(x_0) = \left(\frac{11}{2}x - x^2\right)(11 - 2x) - \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(11 - 2x_0)$$

se puede escribir:

$$\begin{array}{lcl}\left(\frac{11}{2}x - x^2\right)(11-2x) & - & \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(11-2x) + \\ \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(11-2x) & - & \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(11-2x_0)\end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl}\frac{V(x)-V(x_0)}{x-x_0} & = & \left(\frac{\frac{11}{2}x - x^2 - \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)}{x-x_0}\right)(11-2x) \\ + \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right) & & \left(\frac{(11-2x)-(11-2x_0)}{x-x_0}\right)\end{array}$$

Vemos entonces que cuando x tiende a x_0:

$$V'(x_0) = \left(\frac{11}{2}x - x^2\right)'(x_0)(11-2x_0) + \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(11-2x)'(x_0)$$

ya que:

$$\frac{\left(\frac{11}{2}x - x^2\right) - \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)}{x-x_0}$$

tiende a la derivada en x_0 de $\frac{11}{2}x - x^2, 11-2x$ tiende a $11-2x_0$, y lo mismo para los otros términos.

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl}V'(x_0) & = & \left(\frac{11}{2} - 2x_0\right)(11-2x_0) + \left(\frac{11}{2}x_0 - x_0^2\right)(-2) \\ V'(x_0) & = & \left(\frac{11}{2} - 2x_0 - x_0\right)(11-2x_0) \\ V'(x) & = & (11-2x)\left(\frac{11}{2} - 3x\right)\end{array}$$

como lo habíamos visto antes.

Ahora bien, de la primera expresión que encontramos para $V'(x_0)$ podemos formular la siguiente regla:

$$\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Antes de probar esta regla, veamos lo que significa geométricamente (figura 1.7). Consideremos un rectángulo de lados f y g donde $f(t)$ y $g(t)$ son funciones de, digamos, el tiempo. Al tiempo $t + \Delta t$ el rectángulo habrá crecido, por ejemplo:

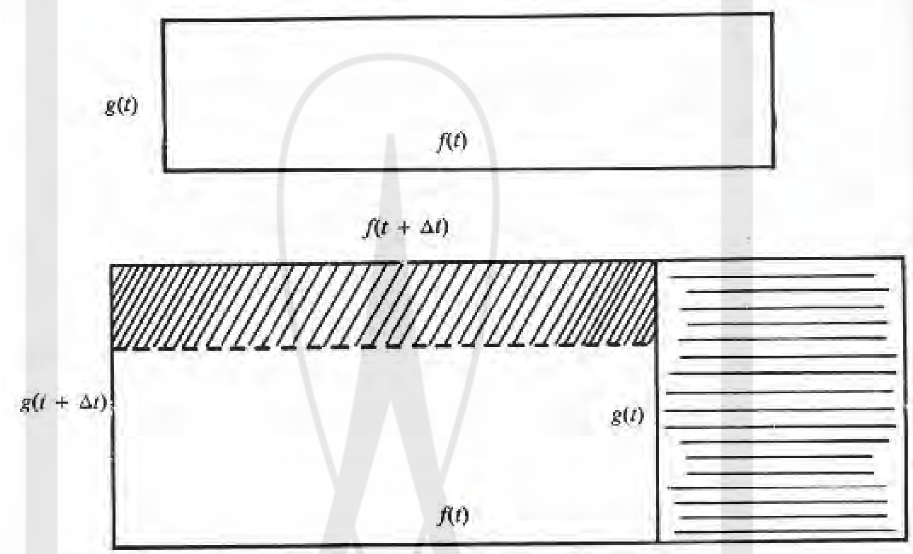

Figura 1.7

El incremento en el área es pues la región sombreada:

$$f(t)(g(t+\Delta t)-g(t))+(f(t+\Delta t)-f(t))g(t+\Delta t)=f\Delta g+(\Delta f)g$$

y la fórmula parece cierta.

Analíticamente:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)g(x)+f(x_0)\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\end{aligned}$$

Entonces cuando x tiende a x_0, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ tienen respectivamente a $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$, mientras que $g(x)$ tiende a $g(x_0)$ y $f(x_0)$ permanece constante (aquí supusimos implícitamente que todos estos límites existen o sea que f y g tienden derivada en x_0), y la regla queda probada.

Ejemplo 1.4:

La relación $(cf)' = cf'$ es un caso particular de esta regla ya que la derivada de una constante es cero.

Ejemplo 1.5:

$x^2 = xx$, por lo tanto: $(x^2)' = (x)'x + x(x)' = 2x$
$x^3 = x^2x$, entonces: $(x^3)' = (x^2)'x + x^2(x)' = 2xx + x^2 = 3x^2$

También

$$\begin{aligned} x^3 = xxx : (x^3)' &= 1(xx) + x(xx)' = xx + x(x+x) = 3x^2 \\ x^n = x\cdots x : (x^n)' &= 1(x^{n-1}) + x(1)x^{n-2} + x^2(1)x^{n-3} + .. + x^{n-1}(1) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6:

En el problema de don Juvencio la ganancia $G(x)$ era:

$$G(x) = 8V(x) + 100 - 4(121 - 4x^2 + x) - 16$$

Por lo tanto:

$$G'(x) = 8V'(x) - 4(-8x + 1)$$

Ahora:

$$8V(x) = 4x(11 - 2x)^2$$

Por lo tanto:

$$8V(x)' = (4x)'(11 - 2x)^2 + 4x\{(11 - 2x)^2\}'$$

Y como:

$$(11 - 2x)^2 = (11 - 2x)(11 - 2x)$$

entonces:

$$\{(11-2x)^2\}' = (11-2x)'(11-2x)+(11-2x)(11-2x)' = 2(11-2x)'(11-2x) = -4(11-2x)$$

De ahí:

$$8V(x)' = 4(11 - 2x)^2 + 4x(-4)(11 - 2x) = 4(11 - 2x)(11 - 2x - 4x)$$

Tenemos pues:

$$\begin{aligned} G'(x) &= 4((11 - 2x)(11 - 6x) + 8x - 1) \\ &= 4(120 - 80x + 12x^2) \\ G'(x) &= 16(30 - 20x + 3x^2) \end{aligned}$$

$G'(x)$ representa una parábola con raíces $x_1 = \frac{10-\sqrt{10}}{3}$ y $x_2 = \frac{10+\sqrt{10}}{3}$

Para x menor que $x_1, G'(x)$ es positiva y por lo tanto $G(x)$ es creciente; para x entre x_1 y $x_2, G'(x)$ es negativa y $G(x)$ es decreciente y para x mayor que $x_2, G'(x)$ es positiva y $G(x)$ es creciente: en x_1 hay un máximo y en x_2 un mínimo (figura 1.8).

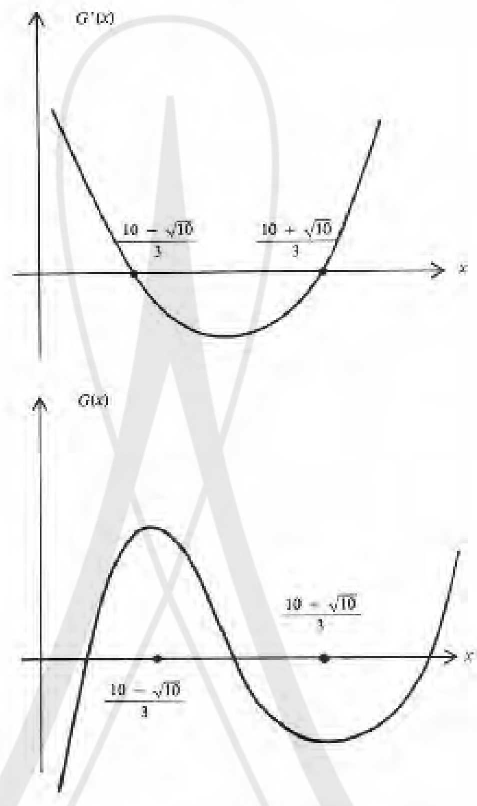

Figura 1.8

Ejemplo 1.6:

En el último ejemplo vimos que:

$$\{(11-2x)^2\}' = 2(11-2x)'(11-2x).$$

Podemos de la misma manera calcular la derivada de $f(x)^2$: $f(x)^2 = f(x)f(x)$, entonces, por la regla del producto: $(f(x)^2)' = f(x)'f(x) + f'(x)f(x)$, es decir,

$$\boxed{(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)}$$

EJERCICIOS:

1.11) Calcule las derivadas de:

(a) $f(x) = (3x-1)(1-5x)$

(b) $g(x) = (4x-x^2)(x^2+3x-1)$

(c) $h(x) = (x^3-3x+1)^2$

(d) $j(x) = \left(\dfrac{1}{x} - x\right)(6x-1)$

1.12) Si $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ entonces ¿$f'(x) =$?

1.13) Pruebe que $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x), n \geq 1$ entero.

1.14) Calcule las derivadas de:

(a) $f(x) = \cos x \operatorname{sen} x$

(b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$

(c) $h(x) = \cos^n x, n \geq 1$ entero

(d) $j(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

1.15) Sea $h(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$, escribiendo $3x = (x^2-1)h(x)$, calcule $h'(x)$.

Ejemplo 1.7:

En el fascículo II vimos que Ae^{ax} es solución de la ecuación:

$$f'(x) = af(x) \text{ y } f(0) = A.$$

Dijimos en esa ocasión que esa era la única solución y lo probaremos ahora usando la regla del producto.

Supongamos que $g'(x) = ag(x), g(0) = A$ es otra solución y consideremos $\frac{e^{-ax}}{A}g(x)$ cuya derivada es:

$$\left(\frac{e^{-ax}}{A}g(x)\right)' = \left(\frac{e^{-ax}}{A}\right)' g(x) + \frac{e^{-ax}}{A}g'(x)$$

usando

$$\left(\frac{e^{-ax}}{A}\right)' = -\frac{a}{A}e^{-ax} \text{ y } g'(x) = ag(x)$$

tenemos:

$$\left(\frac{e^{-ax}}{A}g(x)\right)' = -\frac{a}{A}e^{-ax}g(x) + \frac{e^{-ax}}{A}ag(x) = 0$$

La función $\frac{e^{-ax}}{A}g(x)$ tiene derivada cero para cada x; por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que esa función debe ser constante:

$$\frac{e^{-ax}}{A}g(x) = \left(\frac{e^{-ax}}{A}g(x)\right)(0) = \frac{g(0)}{A} = \frac{A}{A} = 1$$

Entonces

$$g(x) = \frac{A}{e^{-ax}} = Ae^{ax}.$$

Ejemplo 1.8: Derivada de una raíz cuadrada

Todos nosotros nos hemos percatado de que al cruzar un coche cuyo conductor está tocando la bocina se nota una variacion en el tono de ésta: el sonido es más grave cuando el coche se aleja que cuando se acerca. Este fenómeno, el efecto Doppler, es muy importante en física: por ejemplo sirve para calcular la velocidad de rotación de los planetas, la velocidad a la cual se mueven las galaxias (usando luz en lugar de sonido) y muchas otras aplicaciones. La diferencia de tono depende únicamente de la velocidad a la cual se acercan o se alejan los dos móviles, el observador y el que emite el sonido o la luz (el lector interesado podrá encontrar más información en algún libro de física).

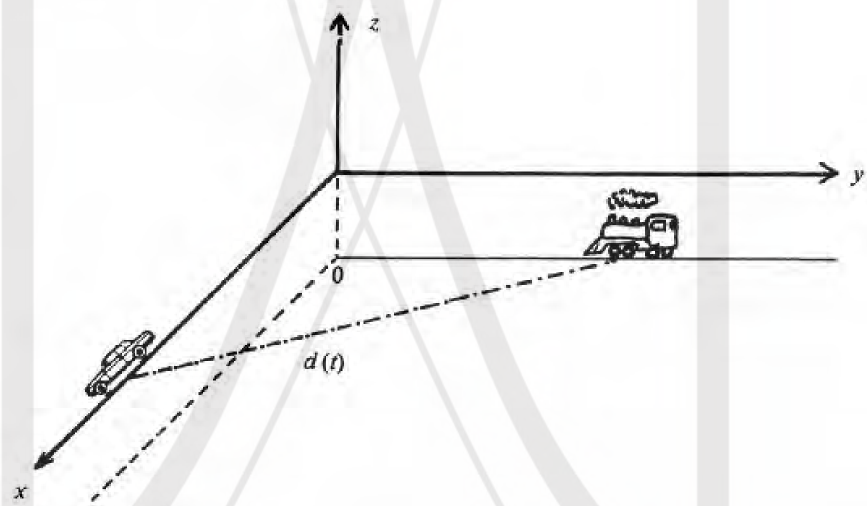

Figura 1.9

Nos interesa pues calcular esa velocidad: por ejemplo, supongamos que un tren pasa diez metros abajo de una carretera en el instante en que un coche pasa por ella. El tren se mueve a una velocidad constante de 18 km/h (5 m/s) y el coche, en una dirección perpendicular, a una velocidad de 90 km/h (25 m/s). ¿A qué velocidad se alejan los dos vehículos al cabo de 20 segundos?.

Tomemos ejes de coordenadas de tal modo que el coche se mueva sobre el eje x y el tren sobre una paralela al eje y pero a una profundidad de 10 metros.

Al instante t, el coche estará en el punto: $x = 25t, y = 0, z = 0$ y el tren en el punto: $x = 0, y = 5t, z = -10$. (figura 1.9). Sabemos que la distancia entre dos puntos de coordenadas (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) es:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Aquí

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(25t)^2 + (5t)^2 + (-10)^2} = \sqrt{(25)^2t^2 + (5)^2t^2 + 5^2 2^2} \\ d(t) &= 5\sqrt{26t^2 + 4} \end{aligned}$$

La velocidad a la cual se alejan los dos vehículos será $d'(t)$ y para calcular esa derivada usaremos primero la definición:

$$\frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} = 5\frac{(\sqrt{26t^2 + 4} - \sqrt{26t_0^2 + 4})}{t - t_0}$$

que escribiremos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} & 5\frac{(\sqrt{26t^2 + 4} - \sqrt{26t_0^2 + 4})}{t - t_0} \frac{(\sqrt{26t^2 + 4} + \sqrt{26t_0^2 + 4})}{\sqrt{26t^2 + 4} + \sqrt{26t_0^2 + 4}} \\ = & \; 5\frac{(26t^2 + 4 - 26t_0^2 - 4)}{(t - t_0)(\sqrt{26t^2 + 4} + \sqrt{26t_0^2 + 4})} \\ = & \; \frac{130(t + t_0)}{\sqrt{26t^2 + 4} + \sqrt{26t_0^2 + 4}} \end{aligned}$$

donde usamos la relación $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Entonces, cuando t tiende a t_0 tendremos:

$$d'(t_0) = \frac{130t_0}{\sqrt{26t_0^2 + 4}} = \frac{25 \times 26t_0}{d(t_0)}$$

Por lo tanto, si t_0 es 20 segundos: $d(t_0) = 510$ metros y $d'(t_0) = \frac{1300}{51} \cong 25.5m/s$.

Hay una manera más simple de calcular $d'(t)$, viendo que $d(t)^2 = 25(26t^2 + 4)$

Por lo tanto, usando la regla del producto: $2d(t)d'(t) = 25(52t)$ o sea $d'(t) = \frac{25 \times 26t}{d(t)}$

Este último método nos permite calcular la derivada de una raíz cuadrada. Si $g(x) = \sqrt{f(x)}$, con $f(x) \geq 0$, entonces: $g(x)^2 = f(x)$, y derivando:

$$2g(x)g'(x) = f'(x); g'(x) = \frac{f'(x)}{2g(x)}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$$

(Evidentemente necesitamos que $f(x)$ sea distinto de cero en el punto donde derivamos).

Problema 1.7:

a) Dos vehículos comienzan a alejarse uno del otro en direcciones perpendiculares, uno a una velocidad de 90 km/h y el otro a 72 km/h (20 m/s). ¿A qué velocidad se alejarán al cabo de 10 segundos?

b) Mismo problema pero esta vez el que va a 72 km/h sale con 20 metros de adelanto.

EJERCICIOS:

1.16) Calcule las derivadas de:

(a) $\sqrt{1+t},\ t \geq -1$

(b) $\sqrt{t+t^3}+t,\ t \geq 0$

(c) $t\sqrt{t^2+1}$

(d) $\sqrt{x^3+x+1}$

(e) $\left(\dfrac{1}{x}+x\right)^{1/2}$

(f) $\sqrt{x^2+1}(x^4+x-1)$

(g) $\sqrt{\cos x}$

(h) $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$

Ejemplo 1.9:

Se considera un círculo de radio r. ¿Cuál es el rectángulo de máxima área inscrito en él? (figura 1.10).

Por la simetría de la figura 1.10, está claro que el área del rectángulo es cuatro veces el área del rectángulo del primer cuadrante con un vértice en A, de coordenadas (x, y). Ahora x y y no son independientes ya que, A estando sobre el círculo, debemos tener $x^2+y^2=r^2$.

Por lo tanto, $y=\sqrt{r^2-x^2}$ y el área del rectángulo es:

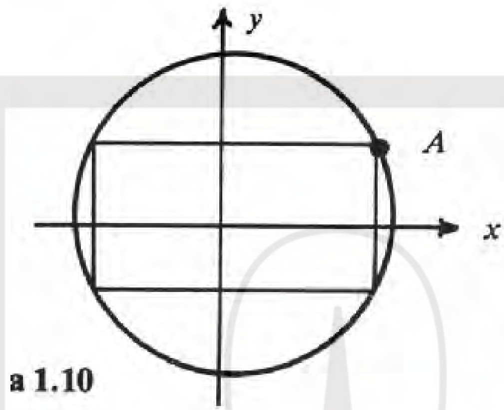

Figura 1.10

$$A(x) = 4xy = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Entonces:

$$A'(x) = (4x)'\sqrt{r^2 - x^2} + 4x(\sqrt{r^2 - x^2})' = 4\sqrt{r^2 - r^2} + 4x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

usando la fórmula para la raíz cuadrada.

Por lo tanto:

$$A'(x) = r\left(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = 4\left(\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)$$

Es fácil ver, estudiando el signo de $A'(x)$, que, en $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $A(x)$ tiene un máximo, el cual corresponde a un cuadrado.

Problema 1.8:

¿Cuál es el rectángulo de mayor área inscrito en una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y de lados paralelos a los ejes?

Problema 1.9:

Un patio rectangular se construye en un jardín semicircular de 10 metros de radio.

Exprese en función de x el área de lo que queda de jardín (figura 1.11). Suponiendo que el área del patio debe ser mayor que 96 m^2, encuentre las

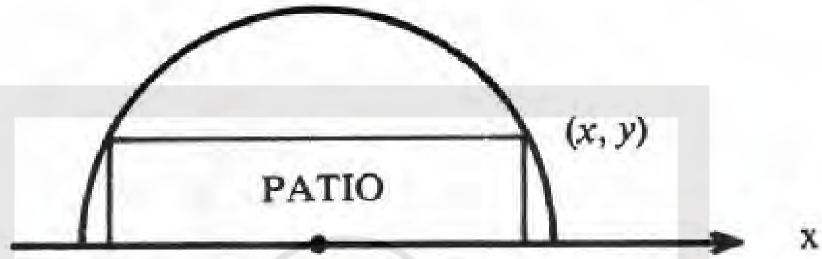

Figura 1.11

dimensiones del patio que dará un área máxima de jardín: se estudiará con cuidado el signo de la derivada. (Respuesta $x = 8$ y $x = 6$).

Problema 1.10:

Se quiere construir un canal de drenaje a partir de una lámina de 30 cms. de ancho, doblándola como en el dibujo (figura 1.12).

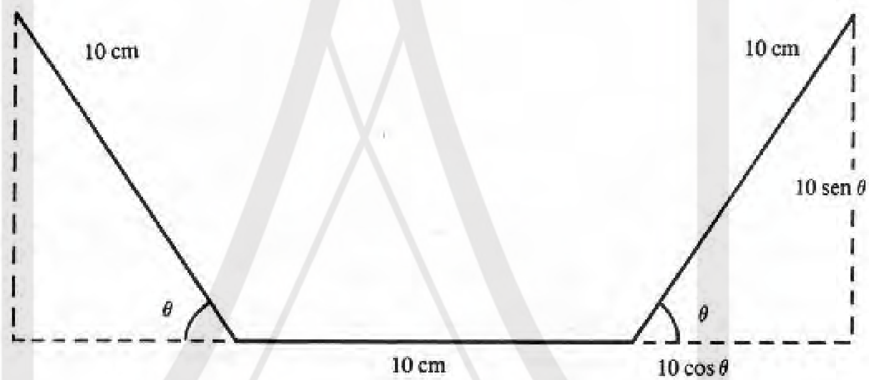

Figura 1.12

Se quiere tener un máximo caudal de agua, o sea un área de trapecio máxima. Para esto, expresar el área del trapecio en función del ángulo θ y calcular la derivada. (Se llegará a un polinomio de segundo grado en $\cos\theta$ cuyo signo dará una respuesta de $\theta = \pi/3$).

Ejemplo 1.10: La ley de Snell

Al estar parados dentro de una alberca con el agua hasta la cintura, al vernos los pies todos hemos experimentado la sensación de tenerlos doblados, o al hundir una vara en el agua parece estar quebrada en el punto de entrada. Este fenómeno óptico llamado refracción, es muy importante para la construcción de lentes y fue solamente hasta 1620 que el astrónomo y matemático flamenco Willebrod Snell (1591-1626) describió su ley experimental; Fermat (véase la nota bibliográfica en el fascículo I) fue el primero en dar una justificación matemática: hasta ese momento se explicaban los fenómenos ópticos por el principio de mínima distancia postulado por Heron de Alejandría (Siglo I D.C.): la luz viajaría de tal modo que la distancia fuera mínima: esto explica perfectamente la reflexión por un espejo:

Para que $PQ+QR$ sea mínima, se necesita que $PQ+QR'$ sea mínima donde R' es el punto simétrico de R con respecto al espejo ($QR = QR'$) y esto sucede sólo si P, Q, R' son alineados: el ángulo de incidencia i y el ángulo de reflexión r son iguales (figura 1.13).

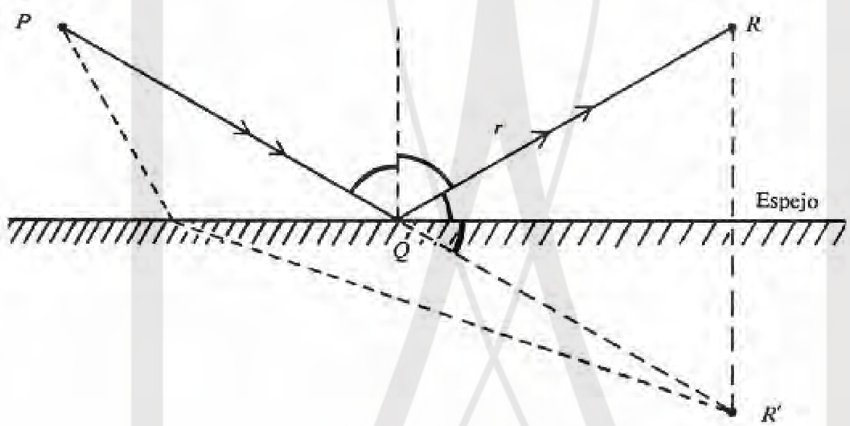

Figura 1.13

Fermat sabía que la luz viaja a una velocidad finita y que esa velocidad depende del medio: en el agua, la propagación es más lenta que en el aire y todavía más lenta que en el vacío. Cuando la luz se refleja en un espejo, el medio no cambia y por lo tanto la distancia más chica corresponde al tiempo de viaje más corto. Fermat postuló que la luz viaja según el camino que acorta el tiempo de viaje y no la distancia.

Supongamos pues que tenemos dos medios, por ejemplo aire y agua, y un rayo de luz que viaja desde el punto P en el aire al punto Q en el agua. Al viajar en cada medio la propagación de la luz es rectilínea (mínima distancia = mínimo tiempo), pero al cruzar de un medio al otro, en el punto R, el rayo se inclina.

Como P y Q son fijos, debemos encontrar el punto R que nos dé un tiempo de recorrido mínimo (figura 1.14).

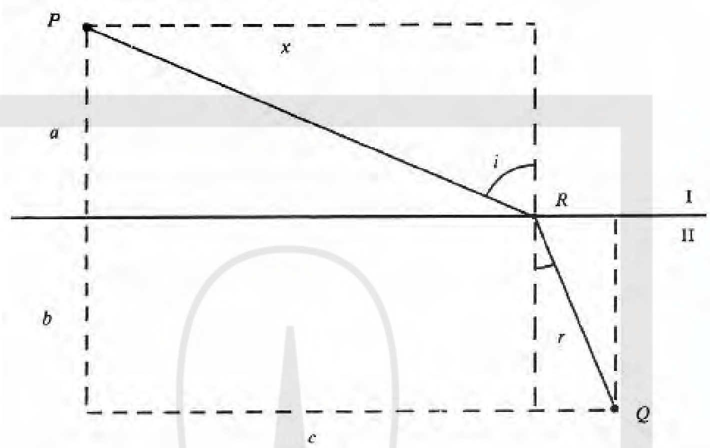

Figura 1.14

Sea V_1 la velocidad de la luz en el primer medio y V_2 en el segundo. Para ir de P a R la luz toma el tiempo $t_1 = \frac{PR}{V_1}$ y para ir de R a Q el tiempo $t_2 = \frac{RQ}{V_2}$.

Como
$$PR = \sqrt{a^2 + x^2} \text{ y } RQ = \sqrt{b^2 + (x-c)^2},$$
el tiempo total
$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (x-c)^2}}{V_2}$$
Entonces:
$$t'(x) = \frac{x}{V_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-c}{V_2\sqrt{b^2 + (x-c)^2}}$$
usando las reglas de suma, producto y raíz.

Ahora
$$\operatorname{sen} i = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ y } \operatorname{sen} r = \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (x-c)^2}}$$
entonces $t'(x)$ vale cero si:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{V_1}{V_2} \text{ Ley de Snell}}$$

Para ver que efectivamente esto nos da el tiempo mínimo, consideremos la función $g(x) = t'(x)$. $g(0) = \frac{-c}{V_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0, g(c) = \frac{c}{V_1\sqrt{a^2+c^2}}$ y veremos en el inciso siguiente que $g'(x)$ es positiva, por tanto $g(x) = t'(x)$ es creciente.

De la gráfica (figura 1.15) se ve que $t'(x)$ tiene un solo cero y que siendo antes negativa, $t(x)$ es decreciente, y después siendo positiva, $t(x)$ creciente, ese cero corresponde a un mínimo de $t(x)$.

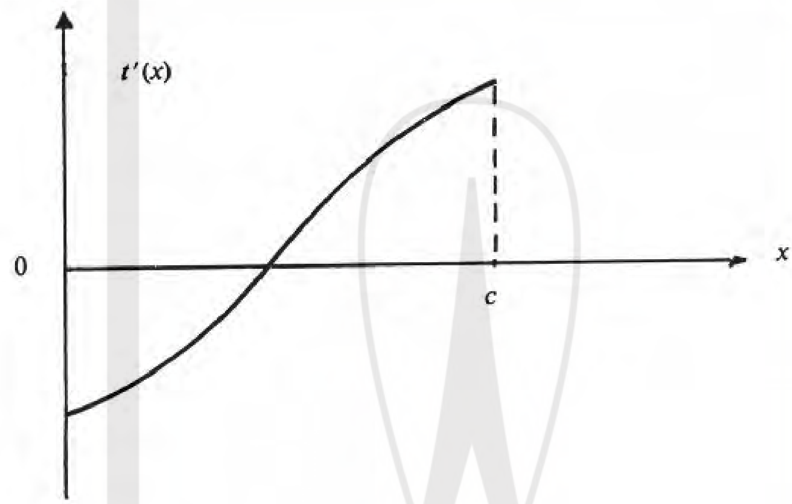

Figura 1.15

Por ejemplo, si $V_2 < V_1$, entonces de la ley de Snell se ve que $i > r$ y podemos tener luz incidente razante $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$ que penetra en el medio II: es el caso de la transmisión aire - agua.

Si $V_1 < V_2$, entonces $i < r$ y podemos tener rayos incidentes que no penetran $(r = \pi/2)$.

Problema 1.11:

Usando un razonamiento parecido al de la ley de Snell, resuelva el siguiente problema: Un guardia de faro quiere llegar lo más rápidamente posible a la ciudad (figura 1.16).

Su barco va a una velocidad de 5 km/h y una vez en tierra toma su bicicleta con la cual puede ir a 10 km/h. ¿Dónde debe dejar su barco sobre la costa para llegar más rápido? (Se llegará a una expresión en x. Respuesta $x = 5$ km).

Problema 1.12:

La compañía de Luz y Fuerza del Centro (en liquidación) quiere suministrar energía eléctrica a una fábrica situada del otro lado del río. El río mide 1.414 km de ancho y el instalar cables abajo del río cuesta tres veces más que por tierra (costo por km instalado) (figura 1.17).

¿Cuál debe ser el punto de llegada del cable, x, para que el costo sea mínimo?

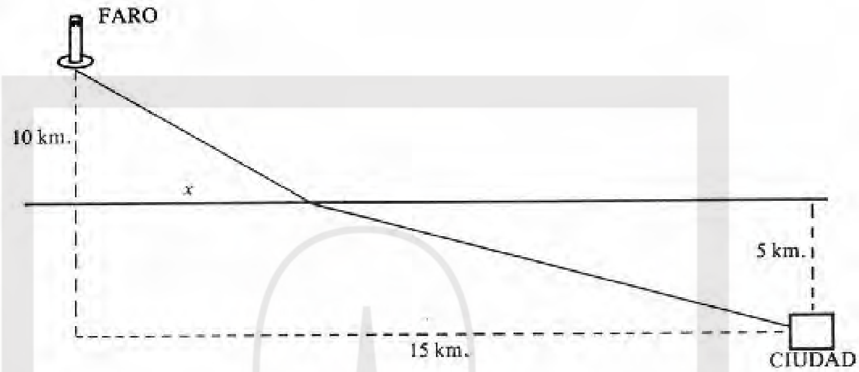

Figura 1.16

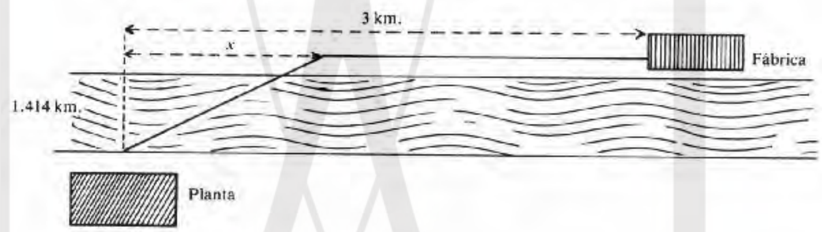

Figura 1.17

(Si c es el costo por km en tierra, $3c$ el costo por km bajo del agua. Exprese el costo total en función de x. Respuesta $x = \frac{1}{2}$ km).

Problema 1.13:

Use cálculo para probar que el principio de reflexión es consecuencia del principio de la mínima distancia.

Ejemplo 1.11: Raíces cúbicas

Del mismo modo que calculamos raíces cuadradas podemos encontrar la derivada de una raíz cúbica:

Si $g(x) = (f(x))^{1/3}$ entonces $f(x) = g(x)^3$ y derivando: $f'(x) = 3g(x)^2 g'(x)$
Por lo tanto: $g'(x) = \frac{f'(x)}{3g(x)^2} = \frac{f'(x)}{3(f(x))^{2/3}}$

$$\frac{d}{dx} f(x)^{1/3} = \frac{1}{3} f(x)^{-2/3} f'(x)$$

Problema 1.14:

Un globo es inflado a una velocidad constante de 1 libra/segundo. ¿A qué velocidad varía su radio? Se recuerda que $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

EJERCICIOS:

1.17) Calcule las derivadas de:

(a) $(1+x)^{\frac{1}{3}}$

(b) $(1+\cos^2 x)^{1/3}$

1.18) Usando el método del ejemplo 1.11 pruebe que:

$$\frac{d}{dx} f(x)^{1/n} = \frac{1}{n} f(x)^{1/n-1} f'(x)$$

1.19) Escribiendo $g(x) = f(x)^{p/q}$ y por lo tanto $g(x)^q = f(x)^p$ pruebe que:

$$\boxed{\left(f(x)^{p/q}\right)' = \frac{p}{q} f(x)^{p/q-1} f'(x)}$$

1.20) Calcule las derivadas de:

(a) $x^{p/q}$

(b) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{3/5}$

(c) $(\operatorname{sen} x + 1)^{3/4}$

(d) $\left((x+\cos x)^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{1/4}$

1.3 DERIVADA DE UN COCIENTE

Tenemos todavía pendientes los cálculos del hijo de don Juvencio para determinar la ganancia óptima y el precio mínimo por dm^3 empacado.

En el primer caso, queremos encontrar el máximo para x entre 0 y 5.5 de la función $H(x) = \frac{G(x)}{V(x)}$ y en el segundo el mínimo de $K(x) = \frac{P(x)}{V(x)}$ donde $G(x) = V(x) + 16x^2 - 4x - 400, V(x) = \frac{1}{2}x(11-2x)^2$ y $P(x) = 8V(x) + 100$.

Ahora ya conocemos las derivadas de $G(x), V(x), P(x)$. ¿Habrá una relación entre la derivada del cociente y las derivadas de cada término, como en el caso del producto?

De hecho podemos escribir $G(x) = V(x)H(x)$ y usar la regla del producto:

$$G'(x) = V'(x)H(x) + V(x)H'(x).$$

Despejando para $H'(x)$ tenemos:

$$H'(x) = \frac{G'(x) - V'(x)H(x)}{V(x)}$$

y usando:

$$H(x) = \frac{G(x)}{V(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{G(x)}{V(x)}\right)' = \frac{G'(x)V(x) - V'(x)G(x)}{V^2(x)}}$$

En nuestro caso:

$$H(x) = \frac{V(x) + 16x^2 - 4x - 400}{V(x)} = 1 + \frac{16x^2 - 4x - 400}{V(x)}$$

Por lo tanto:

$$H'(x) = \frac{(16x^2 - 4x - 400)'V(x) - V'(x)(16x^2 - 4x - 400)}{V^2(x)}$$

y como hemos visto que $V'(x) = \frac{1}{2}(6x - 11)(2x - 11)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \frac{1}{V^2(x)}\left[(32x - 4)\frac{x}{2}(11 - 2x)^2 - \frac{1}{2}(6x - 11)(2x - 11)(16x^2 - 4x - 400)\right] \\
H'(x) &= \frac{2}{V^2(x)}(11 - 2x)((8x - 1)x(11 - 2x) + (6x - 11)(4x^2 - x - 100)) \\
H'(x) &= \frac{2}{V^2(x)}(11 - 2x)(8x^3 + 40x^2 - 600x + 1100) \\
H'(x) &= \frac{16(11 - 2x)}{V^2(x)}\left(x^3 + 5x^2 - 75x + \frac{275}{2}\right)
\end{aligned}$$

Notemos que para conocer el signo de $H'(x)$ para x entre 0 y $\frac{11}{2}$ basta conocer el signo de $x^3 + 5x^2 - 75x + \frac{275}{2}$, lo cual veremos en el capítulo II.

Por el momento, veamos el otro problema de don Juvencio:

$$K(x) = \frac{P(x)}{V(x)} = 8 + \frac{100}{V(x)}$$

Por lo tanto:

$$K'(x) = 100\left(\frac{1}{V(x)}\right)'$$

Usando nuestra fórmula y teniendo en cuenta que la derivada de la función constante 1 es cero:

$$\boxed{\left(\frac{1}{V(x)}\right)' = -\frac{V'(x)}{V^2(x)}}$$

Por lo tanto, los ceros de $K'(x)$ serán los ceros de $V'(x)$ pero el signo de $K'(x)$ será opuesto al signo de $V'(x)$: cuando $V(x)$ crece, $\frac{1}{V(x)}$ decrece y cuando $V(x)$ tiene un máximo, $\frac{1}{V(x)}$ tendrá un mínimo: en $x = \frac{11}{6}, V(x)$ era máximo por lo tanto, $K(x)$ será mínimo.

Ahora en $x = \frac{11}{2}, V(x)$ y $V'(x)$ son ceros y

$$K'(x) = \frac{-100(11-6x)}{\frac{x^2}{2}(11-2x)^3}$$

se hace infinito como $K(x)$, lo cual es obvio si se piensa que para $x = \frac{11}{2}$ la caja tiene volumen cero y el costo por dm^3 será infinito. Esto es sólo para recordarmos que la fórmula de derivación de un cociente es válida solamente si el denominador no es cero y si las funciones involucradas tienen derivada.

A partir de las fórmulas de derivación de un cociente es fácil ver que:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$$

y que

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x,\end{aligned}$$

fórmulas vistas en el fascículo II.

EJERCICIOS:

1.21) Calcule la derivada de:

(a) $\dfrac{x+1}{x-1}$

(b) $\dfrac{x^2}{1+x^2}$

(c) $\dfrac{1}{x^3+3x+1}$

(d) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2}$

(e) $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x+1}}$

(f) $\dfrac{\sqrt{t^4-1}}{t+1}$

(g) $\sqrt{\dfrac{w}{4-w}}$

(h) $\dfrac{1}{x^{1/4}}$ en $x = 16$

(i) $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$ en $x = 4$

1.22) Pruebe las siguientes fórmulas:

(a) $(\cot\theta)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = -(1+\cot^2\theta)$

(b) $\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)' = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$

(c) $\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)' = -\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\dfrac{\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

1.23) Encuentre la derivada de:

(a) $\dfrac{x}{\tan x}$

(b) $\dfrac{\tan x}{\cos x}$

(c) $x(\tan x + \cot x)$

(d) $(x+\cot x)^2$

(e) $\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$.
Encuentre también los puntos donde la derivada se hace cero o ∞.

(f) $\dfrac{e^x}{x}$

(g) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (esta función $\frac{\operatorname{sen} hx}{\cos hx}$ se llama $\tan hx$)

1.24) Pruebe que: $(f^{-p/q})' = \frac{-p}{q} f^{-p/q-1}(x) f'(x)$

Para convencernos definitivamente de la validez de la regla del cociente, la probaremos, sin usar la regla del producto, a partir de la definición:

$$\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0) - (g(x)-g(x_0))f(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}$$

$$= \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

Al tomar el límite cuando x tiende a x_0 y suponiendo que existen todos los límites, tendremos:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Ejemplo 1.12: La ley de Snell

Cuando expusimos la ley de Snell encontramos la función:

$$g(x) = \frac{x}{V_1\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-c}{V_2\sqrt{b^2+(x-c)^2}}$$

y dijimos que esta función tenía una derivada positiva:

De hecho:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{V_1}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2} - x(\sqrt{a^2+x^2})'}{a^2+x^2}\right) + \frac{1}{V_2}\left(\frac{\sqrt{b^2+(x-c)^2} - (x-c)(\sqrt{c^2+(x-c)^2})'}{b^2+(x-c)^2}\right) \\
g'(x) &= \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{V_1(a^2+x^2)} + \frac{\sqrt{b^2+(x-c)^2} - \frac{(x-c)^2}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}}}{V_2(b^2+(x-c)^2)} \\
g'(x) &= \frac{a^2}{V_1(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{V_2(b^2+(x-c)^2)^{3/2}} \text{es siempre positiva.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.13: La escalera

Dos prisioneros desean escapar: el plan es sacar una escalera del almacén para saltar por encima de una pared. Pero para no ser vistos por el guardia deben intentarlo en el punto indicado sobre el plano y por la misma razón no pueden levantar la escalera en la esquina (figura 1.18). Para no quedar atorados al dar la vuelta ¿cuál debe ser la longitud de la escalera que deben escoger? si la pared mide 4 metros ¿hay esperanzas de escapar?

Para que la escalera libre la esquina, debe ser más corta que la recta AB que dibujamos: si la escalera mide L debemos tener:

$$L < \ell(\theta) = \ell_1 + \ell_2 \text{ para todo } \theta \text{ entre } 0 \text{ y } \frac{\pi}{2}.$$

Como:

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \text{ y } \ell_2 = \frac{1}{\cos\theta} \\
\ell(\theta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

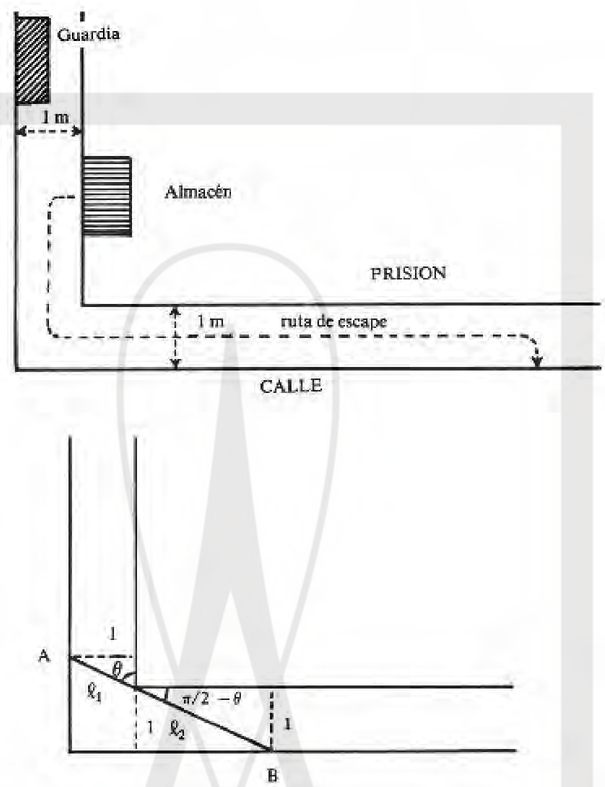

Figura 1.18

¿Cuál es entonces el mínimo de $\ell(\theta), \theta$ entre 0 $\frac{\pi}{2}$, para que al dar la vuelta L sea menor que $\ell(\theta)$?

$$
\begin{aligned}
\ell'(\theta) &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)' + \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)' = \frac{-\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} \\
\ell'(\theta) &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}(\tan^3\theta - 1)
\end{aligned}
$$

Como la función descrita $\tan^3\theta - 1$ es creciente, (su derivada es $3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)$) $\ell'(\theta)$ es, para θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, negativa para θ menor que $\frac{\pi}{4}$ y positiva para θ mayor que $\frac{\pi}{4}$: en $\theta = \frac{\pi}{4}$ tenemos el mínimo para el cual $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cong 2.83m$.

La escalera no debe medir entonces más de 2.83 m. La respuesta a la segunda pregunta depende de qué tan ágiles sean los prisioneros.

Problema 1.15

En otro intento de escape, nuestros prisioneros deben apoyar una escalera contra una pared pasando por encima de una barda (para no hacer un péndulo y caer entre barda y pared). La barda tiene 3 metros de alto y la distancia entre pared y barda es de un metro (figura 1.19).

¿Cuál es la longitud mínima de la escalera que se necesita?

Expresar $\ell = \ell_1 + \ell_2$ en función del ángulo θ.

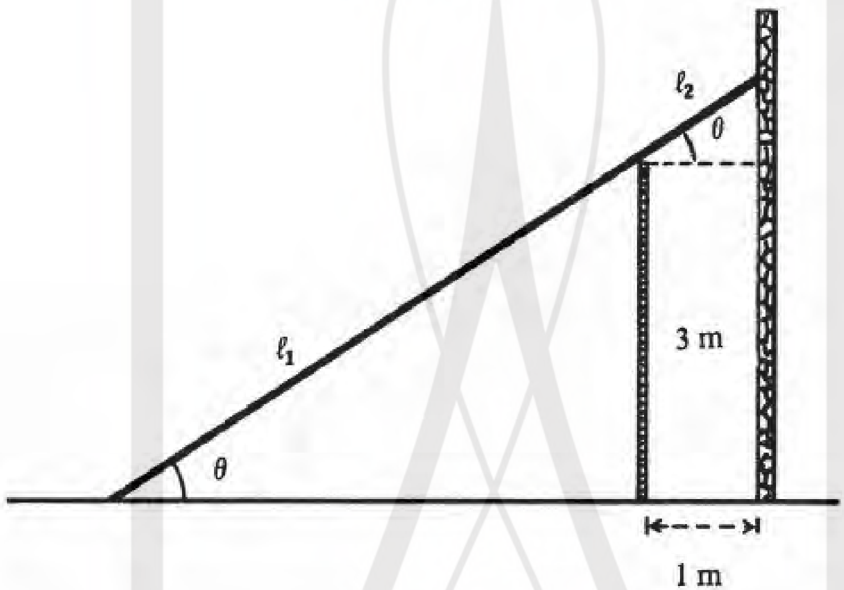

Figura 1.19

Ejemplo 1.14

Se considera una esfera de un metro de radio; ¿cuál es el cono de menor área que la cubre? (figura 1.20).

Si cortamos el cono según la recta AB y lo abrimos tendremos el sector angular de arco $2\pi r$ y radio $\sqrt{r^2+h^2}$ ya que el triángulo AHB es rectángulo.

Ahora sabemos que el área de un sector circular de radio R y ángulo θ es $\frac{\theta R^2}{2}$ ya que para $\theta = 2\pi$ el área del disco es πR^2. Además la longitud del arco del sector es θR.

Aquí $\theta R = 2\pi r$ y $R = \sqrt{r^2+h^2}$ por lo tanto: $\theta = \frac{2\pi r}{R}$ y el área del cono es: $S(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

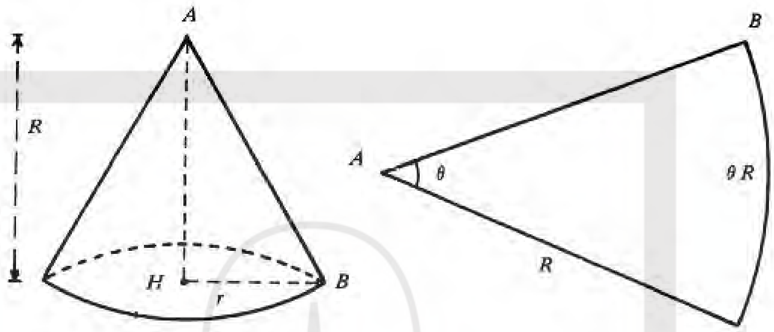

Figura 1.20

El cono de menor área será tangente a la esfera. Si tomamos un corte vertical del cono y de la esfera, pasando por el centro de ésta, vemos que los triángulos AOC y ABH son semejantes. (Los ángulos HBA y AOC son iguales por tener lados ortogonales) (figura 1.21).

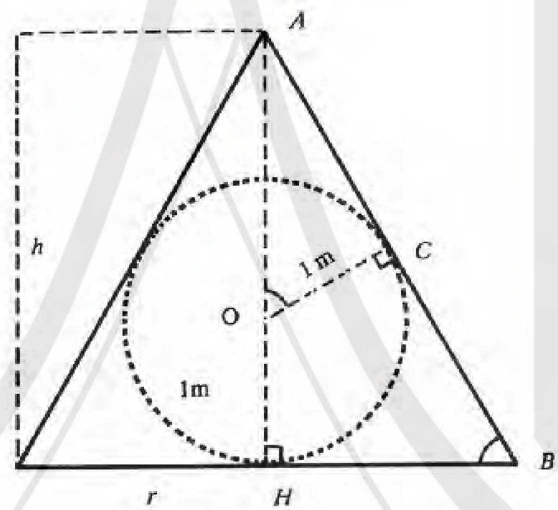

Figura 1.21

Entonces:

$$\frac{HB}{AH} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{(AO)^2-(OC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(h-1)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{h^2-2h}}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{h^2-2h}}, \; r = \frac{h}{\sqrt{h^2-2h}}$$

por lo tanto, el área del cono será:

$$A(h) = \frac{\pi h}{\sqrt{h^2-2h}}\sqrt{\frac{h^2}{h^2-2h}+h^2} = \frac{\pi h(h-1)}{h-2}$$

Notemos que $h > 2$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dh} &= \frac{\pi}{(h-2)^2}((h(h-1))'(h-2) - h(h-1)(h-2)') \\
&= \pi\left(\frac{(2h-1)(h-2)-h(h-1)}{(h-2)^2}\right) \\
\frac{dA}{dh} &= \frac{\pi(h^2-4h+2)}{(h-2)^2}
\end{aligned}$$

Vemos pues que $\frac{dA}{dh}$ se hace cero en $2 \pm \sqrt{2}$ y, siendo negativa entre 2 y $2+\sqrt{2}, A$ decrece antes de $2+\sqrt{2}$ y crece después.

$2+\sqrt{2}$ corresponde a un mínimo de A con $A(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}+3 \cong 5.83m^2$, y en este caso $r = (1+\sqrt{2})^{1/2}, \sqrt{r^2+h^2} = (1+\sqrt{2})^{3/2}$.

Problema 1.16:

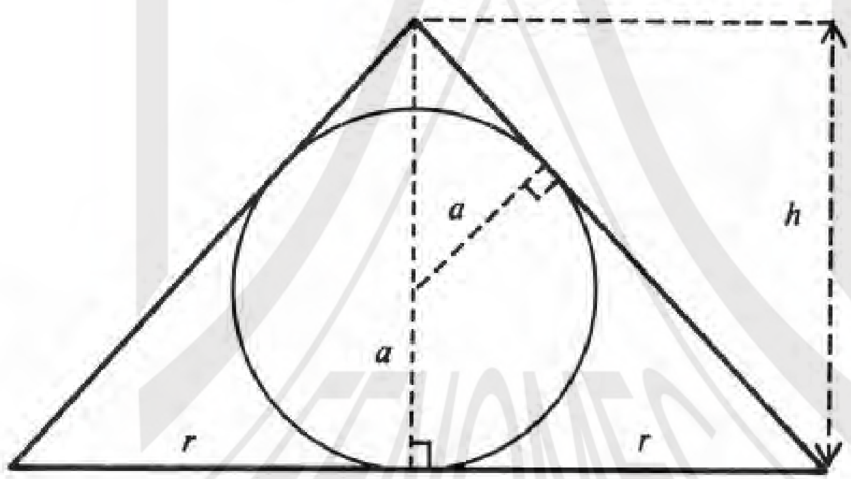

Figura 1.22

a) Se considera un círculo de radio a (figura 1.22). ¿Cuál es el triángulo isósceles de menor perímetro que lo contenga?

b) ¿Cuál es el triángulo isósceles de menor área que contenga al círculo?

¿Qué propiedades tienen esos triángulos? (son equiláteros).

Problema 1.17:

En el ejemplo 1.14 ¿cuál es el cono de menor volumen que contiene a la esfera? (Volumen del cono= $\frac{1}{3}\pi r^2 h$).

Problema 1.18:

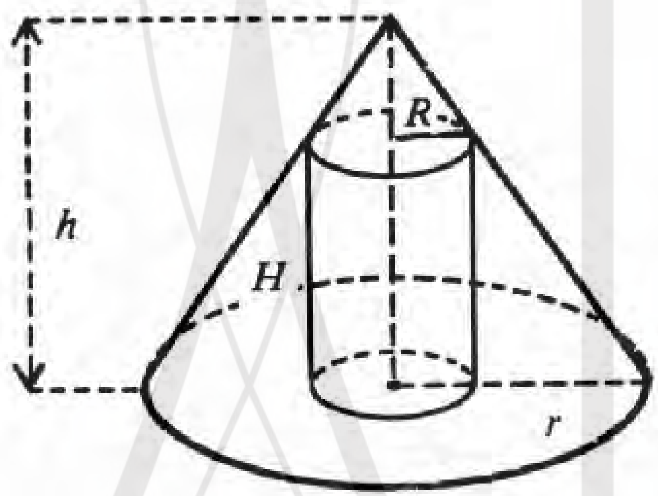

Figura 1.23

Se considera un cilindro recto de radio R y altura H. ¿Cuáles son las dimensiones del cono circular recto de menor volumen que lo contenga? (Véase la figura 1.23)

Usando triángulos semejantes, expresar r en función de h. Probar que $r = \frac{Rh}{h-H}$ y recordar que el volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (Respuesta: $h = 3H, r = \frac{3}{2}R$)

Problema 1.19:

Se considera el rectángulo de alto H y ancho $2R$. ¿Cuál es el triángulo isósceles de menor área que lo contiene? (figura 1.24).

Expresar r en función de h o h en función de r.
(Respuesta: $r = 2R, h = 2H$)

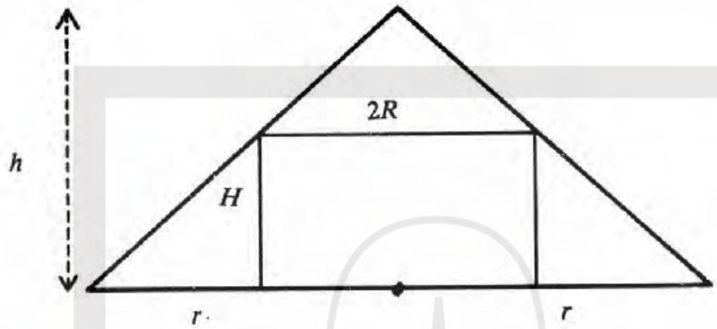

Figura 1.24

1.4 DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS: REGLA DE LA CADENA

La composición de funciones se encuentra muy a menudo: por ejemplo, el caudal de un río depende de (es función de) la precipitación de lluvia, la cual es a su vez función del clima. Consideremos primero un ejemplo más simple.

Ejemplo 1.15: La rueda de la fortuna

En una rueda de la fortuna la altura de cada silla depende del ángulo que hace la silla con la vertical (figura 1.25). Podemos escribir que si h es la altura:

$$h = h(\theta)$$

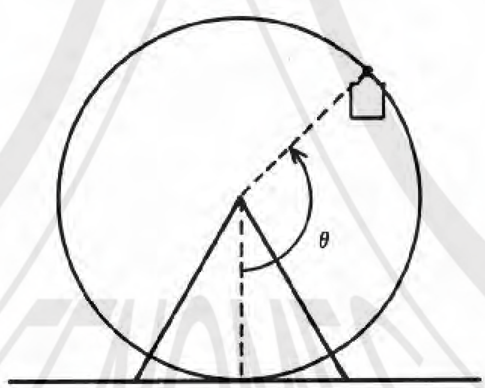

Figura 1.25

Pero ese ángulo depende a su vez de la velocidad de giro de la rueda y por lo tanto del tiemp:

$$\theta = \theta(t)$$

Por lo tanto, la altura depende del tiempo a través del ángulo.

$$h = h(\theta(t))$$

y se dice que $h(\theta(t))$ es la composición de las funciones h y θ. Aquí vemos que si R es el radio de la rueda:

$$h(\theta) = R + R\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R(1 - \cos\theta)$$

Si además suponemos que la rueda da una vuelta completa, $\theta = 2\pi$, en un minuto a velocidad constante, entonces:

$$\theta(t) = 2\pi t$$

si al instante inicial $t = 0, \theta = 0$.

$$h(\theta(t)) = R(1 - \cos 2\pi t)$$

¿Cuál es entonces la velocidad vertical de la silla: $\frac{dh}{dt}$?

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{h(\theta(t)) - h(\theta(t_0))}{t - t_0} &= \frac{R(1 - \cos 2\pi t) - R(1 - \cos 2\pi t_0)}{t - t_0} \\ &= -2\pi R\left(\frac{\cos 2\pi t - \cos 2\pi t_0}{2\pi t - 2\pi t_0}\right) \end{aligned}$$

Ahora cuando t tiende a $t_0, 2\pi t$ tiende a $2\pi t_0$ y

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_0} \frac{\cos 2\pi t - \cos 2\pi t_0}{2\pi t - 2\pi t_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}\bigg|_{x_0 = 2\pi t_0} \\ &= (\cos x)'\bigg|_{x = 2\pi t_0} = -\operatorname{sen} 2\pi t_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dh}{dt} = 2\pi R \operatorname{sen} 2\pi t$$

Notemos que:

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \text{ y } \frac{dh}{d\theta} = R\operatorname{sen}\theta$$

tenemos entonces:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Ejemplo 1.16: La polea

Para ver si esta última fórmula es un accidente o si tiene fundamento, veamos el siguiente caso: Una polea, de un metro de radio, tiene amarrado un cierto peso (por ejemplo una cubeta con agua en un pozo), el cual se suelta en el tiempo $t = 0$ (figura 1.26).

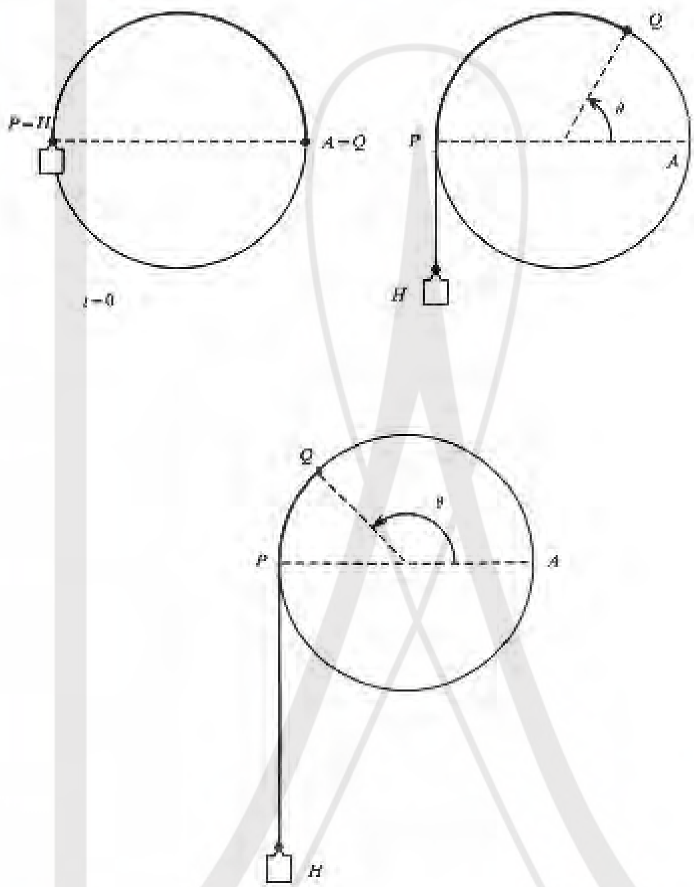

Figura 1.26

¿Cuál es la velocidad vertical del punto de amarre?

Es fácil ver que la longitud del arco AQ es la distancia que ha bajado el peso o sea PH.

Sabemos que $\widehat{AQ} = \theta R = \theta$ y que el punto H cae como si fuera caída libre obedeciendo a la ley de Newton: $PH = \frac{1}{2}gt^2$, con $g \simeq 9.8m/s^2$ (vea el fascículo I).

Suponemos que no hay fricción que impida la caída y que la cuerda es suficientemente larga.

Entonces: $AQ = \theta = PH = \frac{1}{2}gt^2 : \theta(t) = \frac{1}{2}gt^2$, y Q tiene la altura: $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ y queremos calcular $\frac{d}{dt}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\right\}$.

Podemos escribir

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt_0^2\right)}{t - t_0} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt_0^2\right)}{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}\frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{2}{2}gt_0^2}{t - t_0}$$

Ahora, cuando t tiende a t_0, $\dfrac{1}{2}gt^2$ tiende a $\dfrac{1}{2}gt_0^2$ y $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}gt_0^2\right)}{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}$ tiende a la derivada de $\operatorname{sen}\theta$ en $\theta_0 = \dfrac{1}{2}gt_0^2$, mientras que $\dfrac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{t - t_0}$ tiende a la derivada de $\dfrac{1}{2}gt^2$ en t_0.

Por lo tanto, tomando límites tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta(t)) &= \frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta)\bigg|_{\theta=\frac{1}{2}gt_0^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}gt^2\right)\bigg|_{t=t_0}\\ &= \cos\left(\frac{1}{2}gt_0^2\right)gt_0.\end{aligned}$$

Parece entonces que la derivada de una función compuesta es el producto de las derivadas. Más precisamente:

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)}\frac{\Delta g(x)}{\Delta(x)}\\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Como $g(x)$ tiende a $g(x_0)$ cuando x tiende a x_0, entonces $\dfrac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}$ tiende a $f'(g(x_0))$ y $\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ tiende a $g'(x_0)$.

Entonces:

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Regla de la cadena

Notemos que implícitamente supusimos que $g(x) - g(x_0)$ era distinto de cero para poder multiplicar y dividir. Se puede evitar esta dificultad usando el hecho de que una función que tiene derivada en un punto es diferenciable. Aquí no parece necesario entrar en esos detalles técnicos.

EJERCICIOS:

1.25) Calcule la derivada de:

(a) $\cos(x^2)$

(b) e^{-x^2}

(c) $\ln(1+x^2)$

(d) $\tan\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

(e) $\operatorname{sen}(x^2+x+\sqrt{x})$

(f) $\dfrac{1}{\cos(x^2-x)}$

(g) $\cos(x^3\operatorname{sen}^3(5x))$

Ejemplo 1.17:

Arriba de un edificio de 91.6 m hay un anuncio de 10 m de alto (figura 1.27). Un paseante, con los ojos a 1.6 m del suelo, trata de leer lo mejor prosible el anuncio. Esto quiere decir que el ángulo bajo el cual ve el anuncio debe ser el más grande posible. ¿Dónde debe colocarse el paseante para ver mejor?

En el dibujo $\theta(x) = \theta_2 - \theta_1$ debe ser máximo. Ahora:

$$\tan(\theta_1) = \frac{90}{x} \text{ y } \tan\theta_2 = \frac{100}{x}.$$

Por lo tanto, $\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$

(ver las fórmulas de trigonometría).

$$\tan\theta(x) = \frac{\frac{100}{x} - \frac{90}{x}}{1 + \frac{90}{x}\frac{100}{x}} = \frac{10x}{x^2+9000}$$

y
$\dfrac{d\tan\theta(x)}{dx} = 10\dfrac{(9000-x^2)}{(9000+x^2)^2}$ (regla del cociente).

Pero $\dfrac{d\tan\theta(x)}{dx} = (1+\tan^2\theta(x))\theta'(x)$, usando la regla de la cadena.

Entonces

$$\theta'(x) = \frac{10(9000-x^2)}{(9000+x^2)^2(1+\tan^2\theta(x))}$$

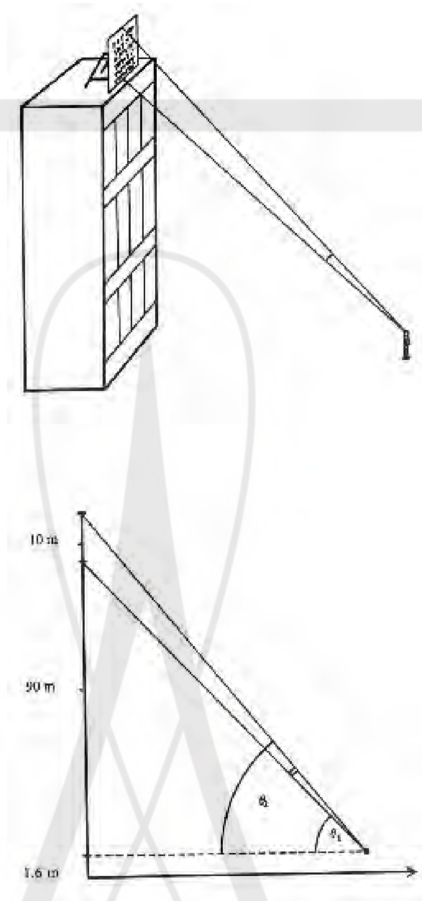

Figura 1.27

tiene el signo de $9000 - x^2$: positivo para x entre 0 y $30\sqrt{10}$ y negativo para x mayor que $30\sqrt{10}$: $\theta(x)$ tiene un máximo en $x = 30\sqrt{10} \simeq 95m$ para el cual $\tan\theta = \frac{\sqrt{10}}{60}$ y $\theta \simeq 3^o$.

EJERCICIOS:

1.26) Podemos escribir $\sqrt{1-x^2} = g(1-x^2)$ donde $g(y) = \sqrt{y}$. Aplicando la regla de la cadena:

$$(\sqrt{1-x^2})' = g(f(x))' = g(f(x))f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\bigg|_{y=1-x^2} (-2x) \right),$$

es decir,

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Sea: $f(x)^{p/q} = g(f(x))$ con $g(y) = y^{p/q}$

Pruebe que $(f(x)^{p/q})' = \frac{p}{q} f(x)^{p/q-1} f'(x)$ usando la regla de la cadena.

1.27) Encuentre las funciones f y g tales que en cada ejemplo se tenga $f(g(x))$ y calcule su derivada.

$$a)\ (x^2-x+1)^4 \qquad b)\ \cos\sqrt{x} \qquad c)\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3}$$

$$d)\ (x\tan\frac{1}{x})^{1/5} \qquad e)\ (x^2-x+27)^{99}$$

1.28) Si en los ejercicios de 1.27 se escribieron las funciones dadas en la forma $f(g(x))$ para todos los casos $a, b..e$, escriba la función $g(f(x))$ y calcule su derivada. Se verá que $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

1.29) Calcule la derivada de

(a) $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\sqrt{x^3+x-\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(c) $\dfrac{(t^3-t^2+3t)^{51}}{(t^5+t^2-3t)^{21}}$

(d) $\sqrt{s+\sqrt{s+\sqrt{s}}}$

1.30) Se dice que una función es **par** si $f(x) = f(-x)$ y una función es **impar** si $f(-x) = -f(x)$. Por ejemplo $\cos x$ es par, $\operatorname{sen} x$ es impar pero $\cos x + \operatorname{sen} x$ no es par ni impar.

(a) Pruebe que si f es par, entonces f' es impar.

(b) Pruebe que si f es impar, entonces f' es par.

(En los dos casos use la regla de la cadena sobre $f(-x)$).

1.31) (a) Si en $x_0 = 0$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$, $f'(0) = 2$, $f'(1) = 1$, ¿cuánto vale $(f(g(0))'$?

(b) Si $f(-1) = 0, g'(0) = 1, f'(-1) = -5$, ¿cuánto vale $(g(f(-1))'$?

Ejemplo 1.18: El pintor

Notemos que podemos conocer $(f(g(x_0))'$ si sabemos $f'(g(x_0))$ y $g'(x_0)$ sin tener que conocer $f(y)$ para todo y.

Por ejemplo, un pintor está sobre una escalera de 5 m de largo, la cual empieza a resbalar (figura 1.28). Cuando la punta de la escalera está a 3 metros de alto, la base x resbala a una velocidad de 20 cm/s. ¿Cuál es la velocidad de la punta en ese momento?

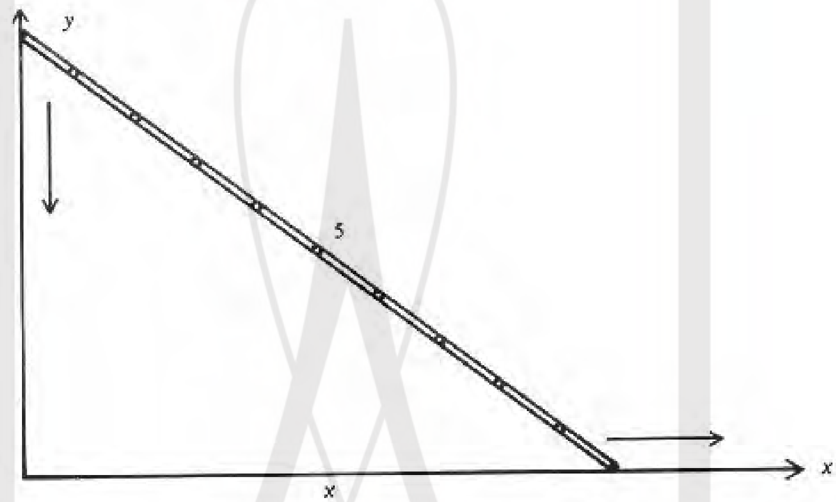

Figura 1.28

De la figura vemos que: $x^2 + y^2 = 5 : y = \sqrt{25 - x^2}$
Sabemos que si y vale 3, x vale 4 y $\dfrac{dx}{dt} = 0.2m/s$.

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{25 - x^2}\right)\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{0.8}{3} \cong -0.266m/s.$$

El signo menos refleja el hecho que y va disminuyendo.

Problema 1.20:

Una lancha es jalada desde un dique de 5 metros de alto (figura 1.29). Si cuando está a 3 metros del dique es jalada a 1 m/s, ¿a qué velocidad va la lancha en ese momento?

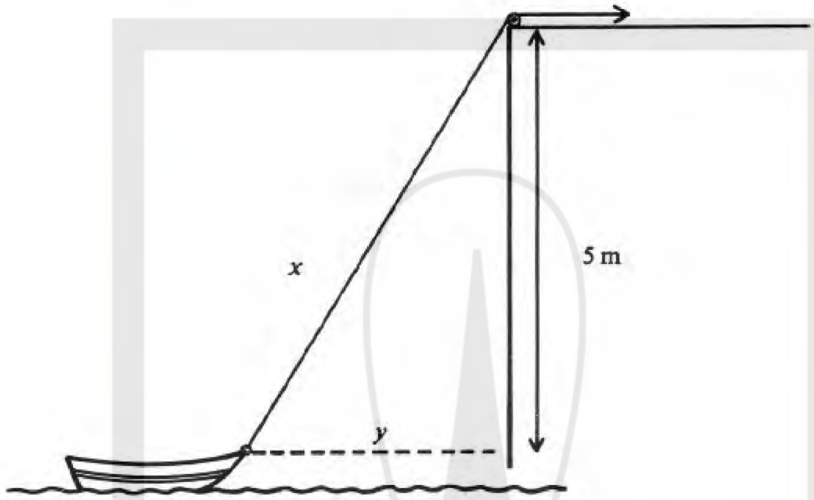

Figura 1.29

$\frac{dx}{dt} = 1$ m/s. Se busca $\frac{dy}{dt}$.

Problema 1.21:

Un albañil levanta tabiques al segundo piso de una casa mediante un sistema de polea. La cuerda mide 25 metros y el albañil, con la punta de la cuerda en el hombro a 1.60 m del suelo, se aleja de la casa (figura 1.30). ¿A qué velocidad suben los tabiques si el albañil estando a 15 m de la pared jala la cuerda a una velocidad de 1 m/s?

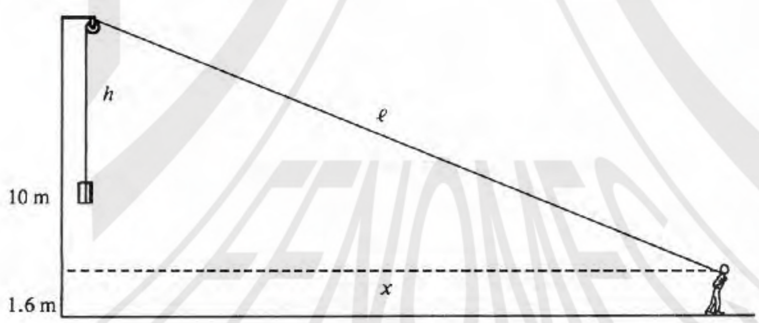

Figura 1.30

Se pide $\dfrac{dh}{dt}$, conociendo $\dfrac{dx}{dt}$. Use $\ell + h = 25, \ell^2 = 100 + x^2$.

Problema 1.22:

Un niño de 1.50 m se aleja de noche de una casa y va hacia un foco puesto en el suelo a 20 metros de la casa (figura 1.31). ¿A qué velocidad crece la sombra, y, del niño sobre la casa en el momento que el niño, estando a 10 metros de la casa, corre a 5 m/s.

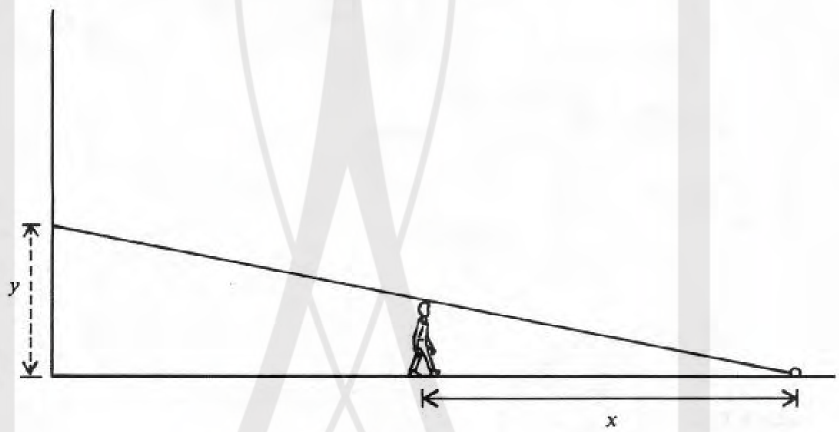

Figura 1.31

Exprese y en función de x. Se pide $\dfrac{dy}{dt}$ conociendo $\dfrac{dx}{dt}$. Cuidado con el signo de $\dfrac{dx}{dt}$.

Problema 1.23:

Una hoja de papel cae verticalmente a 2 metros de un poste de luz de 10 m de alto (figura 1.32). Si cuando está a 2 metros del suelo, la hoja tiene una velocidad de 4 m/s, ¿cuál será en ese momento la velocidad de su sombra?

Exprese y en función de h.

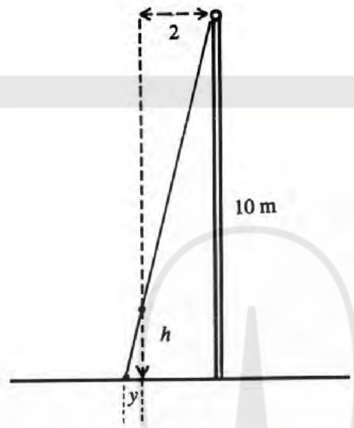

Figura 1.32

Ejemplo 1.19: Derivada de la función inversa

¿Qué es una función inversa?. Esencialmente es la función que permite expresar x en función de y si $y = f(x)$. Por ejemplo: $y = x^{1/3}$ entonces $x = y^3$, si $y = \sqrt{x}$, con x positivo, entonces $x = y^2$ y, como lo hemos visto en el fascículo II, $y = \ln x$ entonces $x = e^y$.

Más generalmente se dice que $f(x)$ es inversa de $g(x)$ si

$$\boxed{g(f(x)) = x \text{ y } f(g(x)) = x \text{ para toda } x.}$$

Por ejemplo si:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \text{ y } g(x) = x^{1/3}; \\ f(g(x)) &= f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x \\ g(f(x)) &= g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x \end{aligned}$$

Ahora, no todas las funciones tienen una inversa. Por ejemplo $y = x^2$ entonces $x = \pm\sqrt{y}$ la cual no es una función. De hecho para tener una función inversa se necesita que para cada y considerada le corresponde una sola x.

Es fácil convencerse mediante dibujos que si $f(x)$ es continua y tiene inversa entonces f es siempre creciente o decreciente.

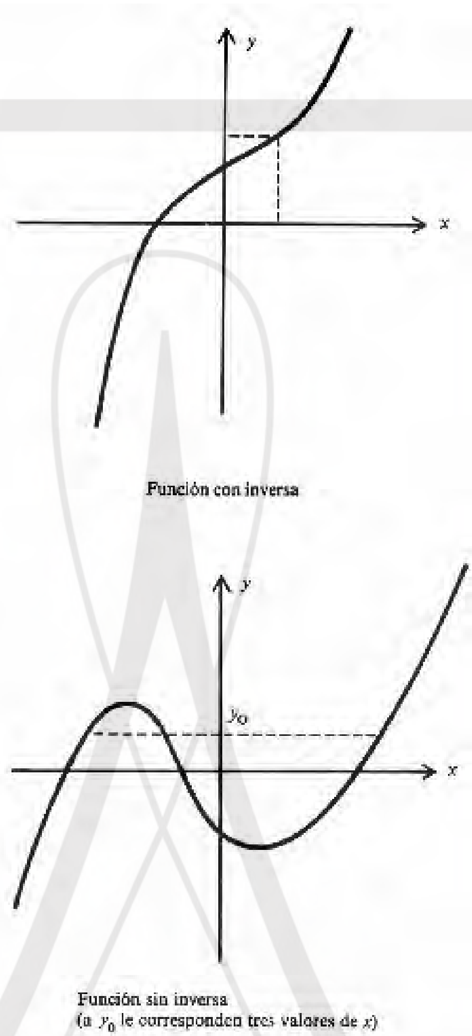

Figura 1.33

La inversa de $f(x)$ se denota $f^{-1}(x)$ la cual no debe confundirse con $f(x)^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$ (Se recomienda tomar algunos ejemplos para convencerse).

Nos interesa por el momento calcular la derivada de $f^{-1}(x)$. Para esto usaremos la regla de la cadena sobre la expresión $f(f^{-1}(x)) = x$; suponiendo que $f^{-1}(x)$ es derivable, lo cual se puede demostrar.

$$f'(f^{-1}(x))f(x)' = \frac{dx}{dx} = 1.$$

$$\boxed{f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Podemos también ver que

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \\
&= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}
\end{aligned}$$

donde $y = f^{-1}(x)$ y $y_0 = f^{-1}(x_0)$, suponiendo que $f(y) - f(y_0)$ no es cero.

Entonces cuando x tiende a x_0, y tiende a y_0, y el cociente tiende por una parte a $f^{-1}(x_0)'$ y por otra a $\frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$.

Esta última prueba nos da una manera rápida de acordarnos de la regla de la derivada de la función inversa: poniendo $y = f(x)$:

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

cuya interpretación es la fórmula anterior.

Por ejemplo: $(x^3)' = 3x^2$, entonces:

$$(x^{1/3})' = \left.\frac{1}{3y^2}\right|_{y=x^{1/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{1/3-1}$$

donde $\left.3y^2\right|_{y=x^{1/3}}$ significa el valor de la función $3y^2$ cuando y vale $x^{1/3}$.

$$(e^x)' = \left.\frac{1}{(\log y)'}\right|_{y=e^x} = \frac{1}{\frac{1}{y|y=e^x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

La función $y = x^3 + x + 1$ tiende una inversa. Para verlo basta recordar que como $y' = 3x^2 + 1$ es positiva, y es siempre creciente. De la gráfica se ve que para cada y hay un solo x.

Entonces $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{2x^2+1}$. Necesitamos expresar x en función de y para tener $\dfrac{dx}{dy}$ en función de y, pero para esto hay que usar la fórmula de Cardano.

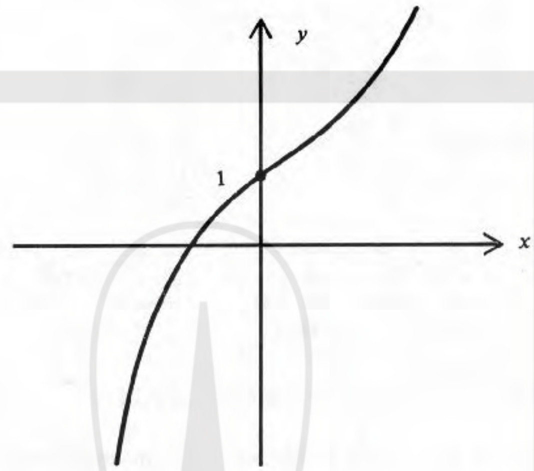

Figura 1.34

En el fascículo V veremos cómo hacer la gráfica de $f^{-1}(x)$ y cómo se puede definir $f^{-1}(x)$ sólo para un intervalo con aplicaciones a las importantes funciones arcotan x y arcosen x.

EJERCICIOS:

1.32) En cada uno de los ejemplos, diga si f y g son inversos o no:

(a) $f(x) = x + 1$
$g(x) = x - 1$

(b) $f(x) = 3x + 1$
$g(x) = 3x - 1$

(c) $f(x) = 3x - 1$
$g(x) = \dfrac{x+1}{3}$

(d) $f(x) = x^2 + 1$ (En este caso limite el intervalo)
$g(x) = \sqrt{x-1}$

1.33) Encuentre $f^{-1}(x)$ (o sea exprese y en función de x).

(a) $f(x) = x^3 - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(c) $f(x) = {}^3\sqrt{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

1.34) Pruebe que si $y = \frac{ax+b}{cx+d} = f(x)$ entonces: $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$

1.35) En cada caso calcule $f^{-1}(x)'$ usando la regla de la inversa.

(a) $f(x) = (x-1)^{1/3}$

(b) $f(x) = x + 10$

(c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Calcule directamente $f^{-1}(x)$ y su derivada comprobando el resultado.

1.36) Diga si $f^{-1}(x)$ tiene derivada, en cuyo caso calcúlela.

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 21$

(b) $f(x) = x^5 + 4x^3 + x - 1$

(c) $f(x) = x^2 - 1$

(d) $f(x) = |x|$

Capítulo 2

COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN: MÁXIMOS Y MÍNIMOS, GRÁFICAS Y APROXIMACIÓN LINEAL

En este capítulo formalizaremos un poco muchas de las cosas que ya hemos visto y asentaremos algunas conclusiones. Por ejemplo, ya hemos estudiado muchos problemas de máximos y mínimos: si una función tiene un máximo local en un punto x_0 y tiene derivada en x_0 entonces la derivada es cero en ese punto. Lo mismo pasa en un mínimo local. Entonces el hecho que la derivada se haga cero es una *condición necesaria*, un pre-requisito, para tener un máximo o un mínimo. Ya hemos visto que no es suficiente: por ejemplo la función $y = x^3$ tiene derivada $3x^2$ que se anula en 0, pero $x = 0$ no es ni mínimo ni máximo. Tenemos que estudiar el signo de la derivada, antes y después del punto donde se anula.

Por otra parte, al buscar máximos y mínimos en un intervalo, tenemos que estudiar los valores de la función en los extremos del intervalo porque puede suceder que, $f'(x)$ anulándose en algún punto, $f(x)$ tenga un máximo local pero que en un extremo la función tenga un valor más grande aún con derivada no nula.

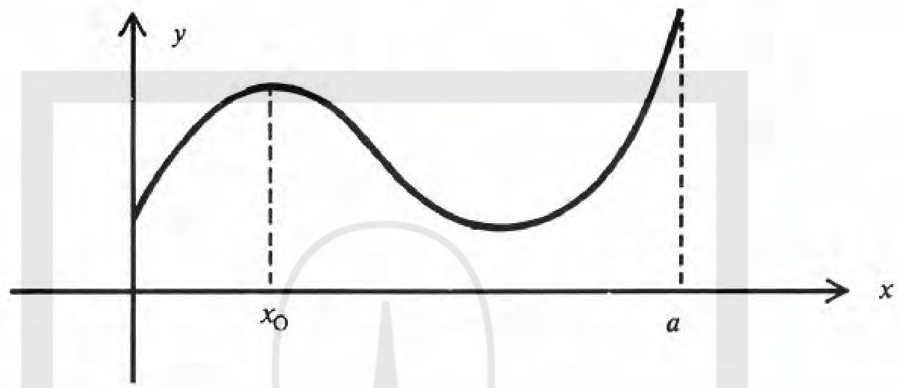

Figura 2.1

En la figura 2.1, en x_0 tenemos un máximo local, pero el máximo en [0, a] está en a.

Finalmente tenemos que asegurarnos de que la derivada exite; la función $(x^2)^{1/3}$ es siempre positiva excepto en $x = 0$ donde vale 0; 0 es un mínimo pero la derivada $2/3x^{-1/3}$ es infinita en 0 (figura 2.2).

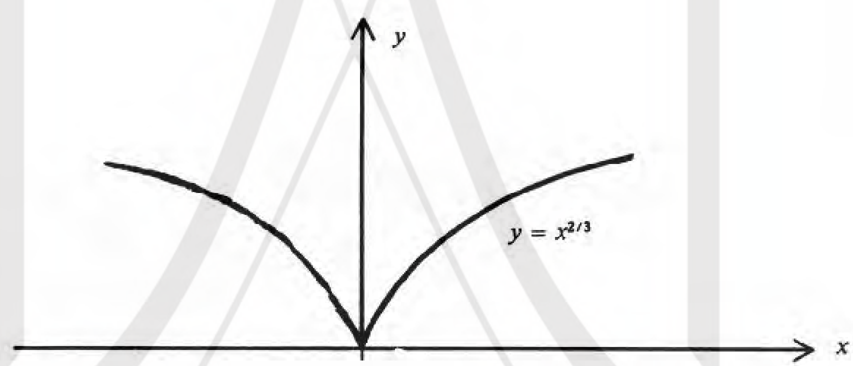

Figura 2.2

Esto quiere decir que antes de saltar a las conclusiones, por ejemplo sólo encontrando los ceros de la derivada, debemos estudiar con cuidado la función y su gráfica. En un problema de máximos y mínimos lo importante es encontrar el signo de la derivada o sea de la pendiente de la tangente, ya que éste nos dice si la función es creciente o decreciente. Es entonces evidente que si una función crece y después decrece, en el punto donde cambia de creciente a decreciente tendremos un máximo local

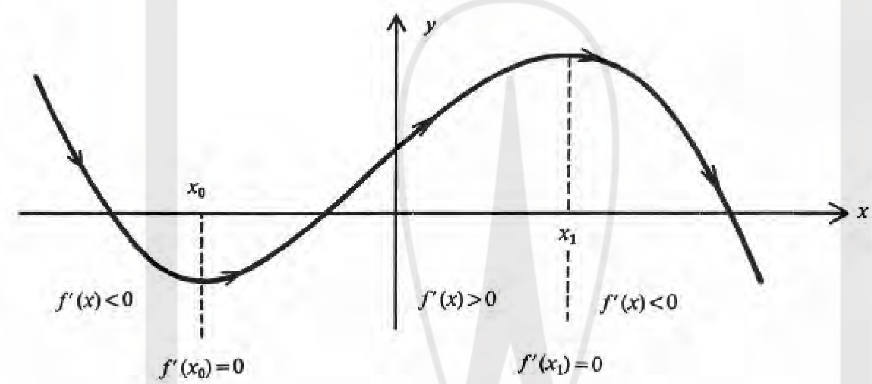

Figura 2.3

Veamos, una vez más, por qué el signo de la derivada da el crecimiento de una función:

Supongamos que en x_0 la función $f(x)$ tiene una derivada $f'(x_0)$: esto significa que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ tiende a cero cuando x tiende a x_0. Si llamamos $r(x)$ esta diferencia, tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \\ \text{con } \lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0 \end{array}}$$

Por ejemplo si

$$f(x) = x^3 + x + 1, x_0 = -1 : f(-1) = -1, f'(x) = 3x^2 + 1 : f'(-1) = 4$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) - f'(-1)(x+1) &= x^3 + x + 1 - (-1) - 4(x+1) \\ &= x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) \\ &= (x+1)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $r(x) = (x+1)(x-2)$ tiende a 0 si x tiende a -1.

EJERCICIOS:

2.1) Calcule $r(x)$ para $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 1$

2.2) Calcule $r(x)$ para $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $x = 0$

2.3) Calcule $r(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$. (Use $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ para calcular $\dfrac{f(x) - f(1) - f'(1)(x-2)}{x-1}$

Respuesta:

$r(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+1}}\right)$.

Ahora $f(x)$ es la ordenada del punto $(x, f(x))$ en la gráfica de f mientras que $y_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la ordenada del punto $(x, y_t(x))$ sobre la recta tangente a la curva en $(x_0, f(x_0))$. Entonces: $f(x) = y_t(x) + r(x)(x - x_0)$.

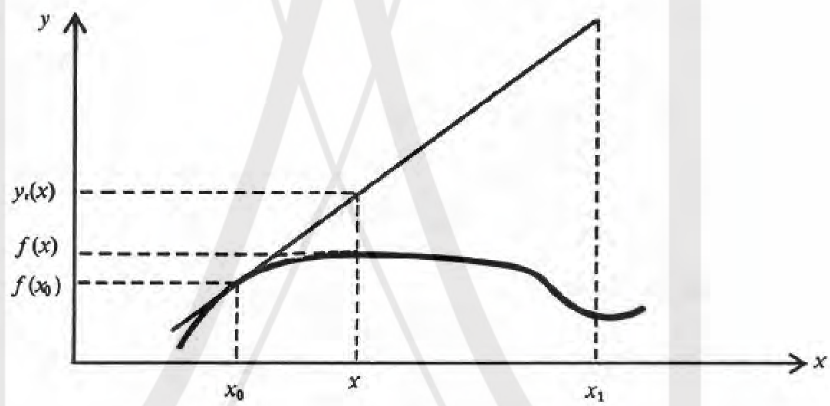

Figura 2.4

El decir que $r(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a x_0 implica no solamente que $f(x) - y(x)$ tiende a cero, o sea que los valores de la función $f(x)$ y los valores sobre la tangente $y_t(x)$ son muy cercanos sino que la diferencia de esos valores tiende a cero más rápidamente que $x - x_0$, ya que $\dfrac{f(x) - y_t(x)}{x - x_0} = f(x)$ tiende a 0.

Se dice entonces que $y_t(x)$ es la *aproximación lineal* de $f(x)$, la cual usaremos más adelante y es claro que entre más nos acercamos a x_0 es mejor. Por ejemplo en x_1 estamos demasiado lejos.

Entonces parece que geométricamente la función "sigue"la tangente: si $f'(x_0) > 0$, la función es creciente, mientras que, si $f'(x_0) < 0$, la función será decreciente y que si $f'(x_0) = 0$ no podemos decir nada:

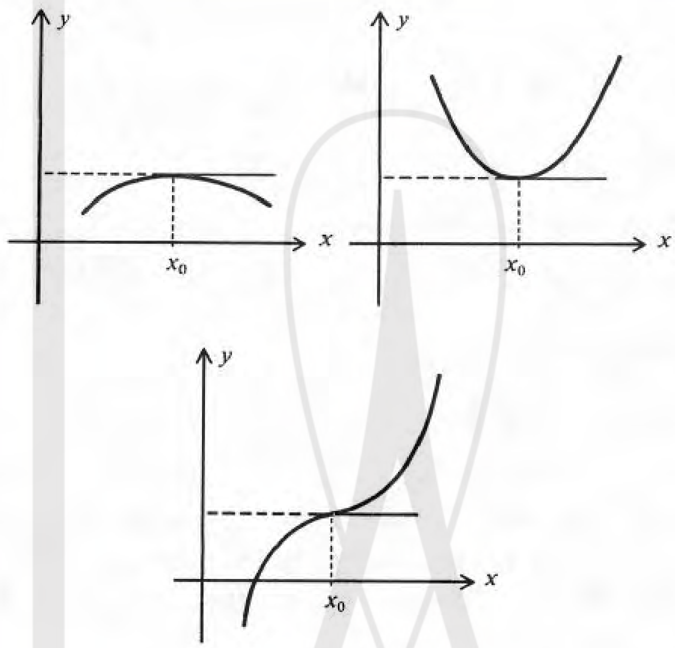

Figura 2.5

Algebraicamente si tomamos dos puntos x_1 y x_2 cercanos a x_0, con $x_1 < x_0 < x_2$ entonces:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + r(x_1)(x_1 - x_0)\text{con} \lim_{x_1 \to x_0} r(x_1) = 0 \\ f(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + r(x_2)(x_2 - x_0)\text{con} \lim_{x_2 \to x_0} r(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo que $f'(x_0) > 0$, de la relación $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) + r(x_1)$ vemos que, si x_1 *está cerca de* x_0, como $r(x_1)$ es pequeño, $f'(x_0) + r(x_1)$ seguirá positivo. Entonces $\frac{f(x_0 - f(x_1)}{x_0 - x_1} > 0$ y como $x_0 - x_1 > 0$:

$$f(x_0) > f(x_1)$$

Del mismo modo, como $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = f'(x_0) + r(x_2)$, podemos tomar x_2 x_2 *tan cerca de* x_0 que $f'(x_0) + r(x_2)$ sigue positivo: entonces

$$f(x_2) > f(x_0)$$

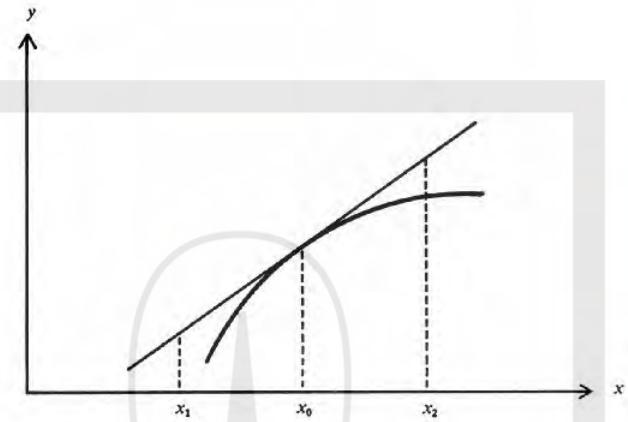

Figura 2.6

y tenemos: $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ si $x_1 < x_0 < x_2$ y $f'(x_0) > 0$.

Si $f'(x_0) < 0$: $f'(x_0) + r(x_1)$ seguirá negativo para x_1 *cerca de* x_0 y por lo tanto: $f(x_1) > f(x_0)$, mientras que $f'(x_0) + r(x_2)$ siendo negativo para x_2 *cercano* a x_0 tendremos $f(x_0) > f(x_2)$.

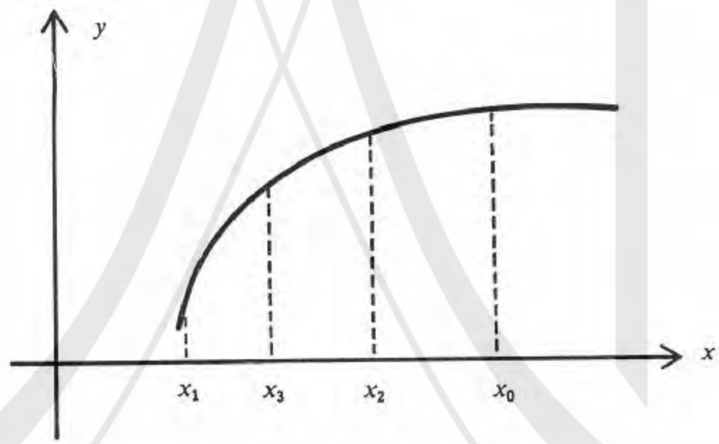

Figura 2.7

Necesitaríamos ver todavía lo que pasa si x_1 y x_2 están de un solo lado de x_0, por ejemplo a la izquierda de x_0 : $x_1 < x_2 < x_0$, para completar la prueba que si $f'(x_0) > 0$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ o sea f es creciente cerca de x_0. Desafortunadamente para esto necesitamos suponer que f no solamente tiene una derivada en x_0 sino también en todo punto cercano a x_0 y que f' es continua. Entonces si $f'(x_0) > 0, f'(x)$ seguirá positiva para x *cercano* a x_0 y podemos tomar un punto x_3 entre x_1 y x_2 con $f'(x_3) > 0$.

Entonces aplicando el razonamiento que ya usamos pero con x_3 en lugar de x_0 tendremos: $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.

Hemos probado pues:

Si $f(x)$ tiene una derivada continua y positiva en un intervalo alrededor de x_0 entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

Si $f(x)$ tiene una derivada continua y negativa en un intervalo alrededor de x_0 entonces $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

Usaremos estas ideas para ver algunos ejemplos, tanto de máximos y mínimos como de gráficas de curvas y recomendamos estudiar todos los problemas anteriores con ese enfoque, haciendo las gráficas de las curvas.

2.1 MAXIMOS Y MINIMOS

Ejemplo 2.1:

Consideremos el triángulo isósceles de la figura 2.8. ¿Cuál es el punto del eje y tal que la suma de las distancias a A, B y C sea mínima?

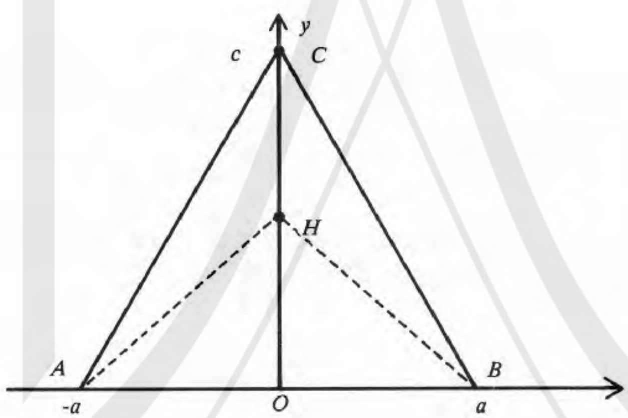

Figura 2.8

Sabemos que la distancia entre dos puntos de coordenadas (x, y) y (x_0, y_0) es $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Si $H = (0, y)$, entonces:

$$AH = \sqrt{y^2+a^2} = BH \text{ y } CH = |y-c|$$

$$d(y) = 2\sqrt{a^2+y^2} + |c-y|$$

Si H es exterior al triángulo es evidente que d será mayor que para un punto adentro, por lo tanto consideraremos únicamente el caso

$$0 \leq y \leq c, \text{ con } d(y) = 2\sqrt{a^2+y^2} + c - y.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d'(y) &= \frac{2y}{\sqrt{a^2+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{a^2+y^2}}{\sqrt{a^2+y^2}} \frac{\left(2y+\sqrt{a^2+y^2}\right)}{2y+\sqrt{a^2+y^2}} \\ d'(y) &= \frac{3y^2-a^2}{\sqrt{a^2+y^2}\left(2y+\sqrt{a^2+y^2}\right)} \end{aligned}$$

Como y es positivo, el signo de $d'(x)$ será el signo de $3y^2 - a^2$, negativo si $y < \frac{a}{\sqrt{3}}$, positivo si $y > \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Si $\frac{a}{\sqrt{3}} > c$ entonces el mínimo de $d(y)$ se obtendrá cuando $y = c$, en el punto C. Ahora como $\frac{a}{c} = \tan(ACO)$ y $\sqrt{3} = \tan 60^o$, la condición $\frac{a}{c} > \sqrt{3}$ implica $\tan(ACO) > \tan 60^o$ y como $\tan x$ es una función creciente: $ACO > 60^o$: el ángulo C es mayor de 120^o.

Si $\frac{a}{\sqrt{3}} < c$ el ángulo C es menor de 120^o, y se obtiene un mínimo en $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ con $d(y) = a\sqrt{3} + c$.

Notemos que en ese caso la posición de H no depende de C y podemos resumir nuestros datos en la siguiente tabla.

y	0		$a/\sqrt{3}$		c
$d'(y)$	-1	$\ominus$	0	$\oplus$	$\frac{2c}{\sqrt{a^2+c^2}} - 1$
$d(y)$	$2a+c$	$\searrow$	$a\sqrt{3}+c$	$\nearrow$	$2\sqrt{a^2+c^2}$

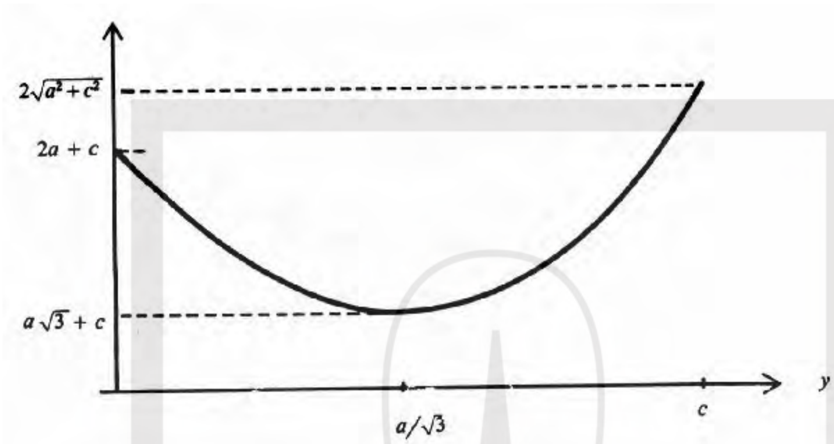

Figura 2.9

Ejemplo 2.2:

Se quiere construir una carretera del punto P al punto Q cruzando un río como lo indica la figura 2.10. ¿Cuál es el trayecto más corto?

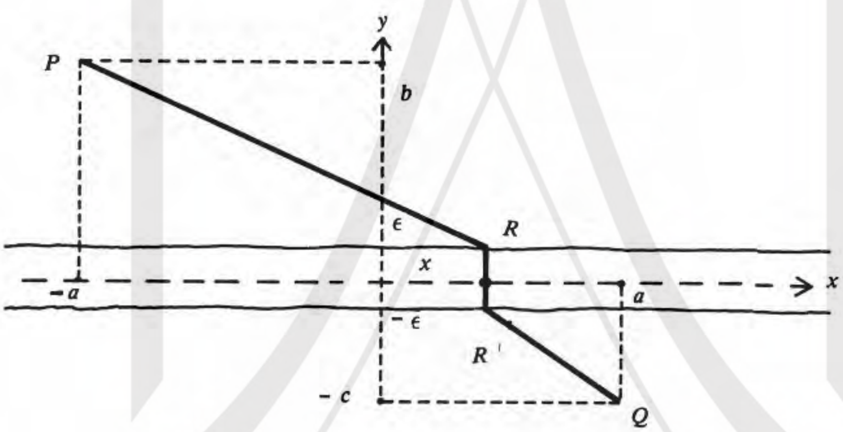

Figura 2.10

El trayecto PR tiene longitud:

$$\sqrt{(x+a)^2+(b-\epsilon)^2} \text{ y } R'Q = \sqrt{(a-x)^2+(c-\epsilon)^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x+a)^2+(b-\epsilon)^2}+2+\epsilon\sqrt{(a-x)^2+(c-\epsilon)^2} \\ \text{con } d'(x) &= \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+(b-\epsilon)^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+(c-\epsilon)^2}} \end{aligned}$$

Es evidente, otra vez, que el mínimo estará entre $-a$ y a : $-a \leq x \leq a$ entonces $x+a$ y $a-x$ son positivos.

Ahora si escribimos:

$$d'(x) = \left(\frac{x+a}{\sqrt{A_1}} - \frac{(a-x)}{\sqrt{A_2}}\right)\frac{(x+a)\sqrt{A_2}+(a-x)\sqrt{A_1}}{(x+a)\sqrt{A_2}+(a-x)\sqrt{A_1}}$$

donde multiplicamos y dividimos por el mismo número positivo

$$d'(x) = \frac{(x+a)^2A_2-(a-x)^2A_1}{\sqrt{A_1}\sqrt{A_2}((x+a)\sqrt{A_2}+(a-x)\sqrt{A_1})}$$

tendrá el signo de $(x+a)^2A_2-(a-x)^2A_1 = (x+a)^2(c-\epsilon)^2-(a-x)^2(b-\epsilon)^2 = x^2((c-\epsilon)^2-(b-\epsilon)^2)+2ax((c-\epsilon)^2+(b-\epsilon)^2)+a^2((c-\epsilon)^2-(b-\epsilon)^2)$.

- *Caso 1:* $c=b$. Este polinomio se reduce a: $4ax(b-\epsilon)^2$: $d'(x)$ es negativo para x negativo y positivo después: en $x=0$ hay un mínimo, con $d(0) = 2\sqrt{a^2+(b-\epsilon)^2}+2\epsilon$, y es fácil ver geométricamente que PR y $R'Q$ son paralelas.

- *Caso 2:* $c \neq b$. El numerador de $d'(x)$ tiene dos raíces:

  $$x_1 = -\frac{a(c-b)}{c+b-2\epsilon} \text{ y } x_2 = -\frac{a(c+b-2\epsilon)}{c-b}$$

  Con $|x_2| > a$ fuera del rango de interés.

Tenemos entonces, poniendo

$\alpha = \sqrt{4a^2+(b-\epsilon)^2},\ \beta = \sqrt{4a^2+(c-\epsilon)^2},\ \gamma = \sqrt{4a^2+(b+c-2\epsilon)^2}$:

$c > b$

x	$-a$		x_1		0		a
$d'(x)$	$\frac{-2a}{\beta}$	$\ominus$	0	$\oplus$		$\oplus$	$\frac{2a}{\alpha}$
$d(x)$	$b+\epsilon+\beta$	$\searrow$	$2\epsilon+\gamma$	$\nearrow$		$\nearrow$ $c+\epsilon+\alpha$	

$c < b$

x	$-a$		0	x_1	a
$d'(x)$		$\ominus$	$\ominus$		$\oplus$
$d(x)$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$
$d(x)$				$2\epsilon + \gamma$	

En los dos casos se deja que el lector haga los cálculos.

Notemos que si $x = x_1$ entonces la pendiente de PR vale $-\dfrac{(b-\epsilon)}{a+x_1} = -\dfrac{(c+b-2\epsilon)}{2a}$ y la de $R'Q$ es $-\frac{(c-\epsilon)}{a-x_1} = -\frac{(c+b-2\epsilon)}{2a}$:

Las rectas PR y $R'Q$ son paralelas. Un fenómeno similar pasa con un rayo de luz que atraviesa un vidrio, excepto que dentro del vidrio la luz se propaga en general con un ángulo distinto de $\frac{\pi}{2}$, pero los rayos PR y $R'Q$ son paralelos: esto se debe a la ley de Snell (véase el ejemplo 1.10).

2.2 GRÁFICAS DE CURVAS

Al hacer la gráfica de una curva, es muy importante no solamente encontrar los máximos y mínimos sino también los tramos donde crece, decrece, es discontinua, las asíntotas, el comportamiento en infinito y, como lo veremos en el fascículo V, la concavidad.

Por lo tanto, recomendamos en general, buscar las características que podrían ser interesantes como las intersecciones con los ejes, los puntos de discontinuidad, la derivada y su signo, dando el crecimiento, y el comportamiento en infinito, incluyendo asíntotas (ver el apéndice), aunque solamente la práctica nos puede decir cuáles de esas características son más relevantes en cada caso particular.

Ejemplo 2.3:

Estudiemos la función

$$f(x) = x^3 - x = x(z-1)(x+1)$$

Intersecciones con el eje $x : x = 0, 1, -1$.

Como $f(x) = x(x^2-1)$, entonces para $|x| > 1, f(x)$ tiene el signo de x y tiende a $-\infty$, cuando x tiende a $-\infty$, a $+\infty$ si x tiende a $+\infty$. Además en esos casos $f(x)$ se comporta como x^3 (ver el apéndice 1).

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La curva $y = f'(x)$ es una parábola apuntando hacia arriba con ceros en $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		∞
$f'(x)$	∞	$\oplus$	2	$\oplus$	0	$\ominus$	-1	$\ominus$	0	$\oplus$	2	$\oplus$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Además, $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$: f es impar, por lo tanto, la gráfica será simétrica con respecto al origen (figura 2.11).

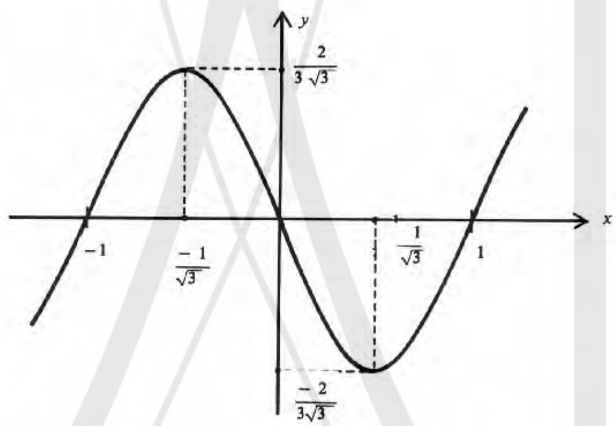

Figura 2.11

EJERCICIOS:

2.4) Haga las gráficas de las siguientes curvas, recordando que a veces no es posible encontrar los ceros de una función. En esos casos se puede dar una estimación de su localización calculando el valor de la función en los máximos y mínimos locales y conociendo su crecimiento:

(a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

(b) $y = x^3 + x + 1$

(c) $y = x^5 - x + 3$

Ejemplo 2.4:

Grafiquemos la función

$$f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$f(x) \text{ vale } 0 \text{ para } x = 0, -\sqrt{2}, +\sqrt{2}.$$

Como $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ para $|x| > \sqrt{2}, f(x)$ tiende a ∞ si x tiende a $a \pm \infty$ y se comporta como x^4 (ver apéndice I).

Además $f(-x) = f(x)$: f es una función par y su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

Finalmente $f'(y) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ de la cual se puede deducir el crecimiento.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1	$\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$	$-\infty$	$\ominus$	$-4\sqrt{2}$	$\ominus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$		$4\sqrt{2}$	$\oplus$	∞
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0		-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

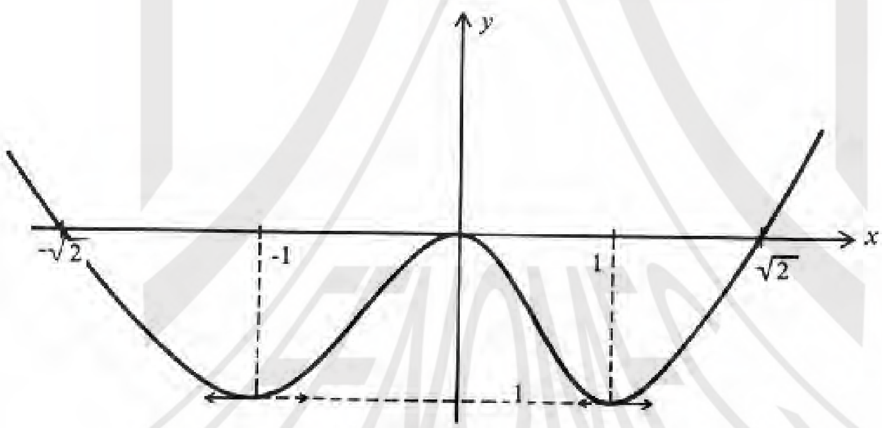

Figura 2.12

Ejemplo 2.5:

Veamos ahora la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 + 1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

Para x cerca de 1, $\dfrac{1}{x-1}$ se hace muy grande: por ejemplo si $x - 1 = 10^3$ entonces $\frac{1}{x-1} = 10^{-3}$, si $x - 1 = 10^{-5}$, $\frac{1}{x-1} = 10^5$; si $x - 1 = -10^{-5}$, $\dfrac{1}{x-1} = -10^5$: hay una discontinuidad en $x = 1$.

Mientras que si x tiende a ∞, $\dfrac{1}{x-1}$ se hace muy chico y $f(x)$ se comporta como $x - 1$: la recta $y = x - 1$ es asíntota de la curva $y = f(x)$.

x	$-\infty$		0			1			2		∞
$f'(x)$	∞		0	$\ominus$	$-\infty$		$-\infty$	$\ominus$	0	$\oplus$	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, tiene el signo de $x(x-2)$. Véase la figura 2.13.

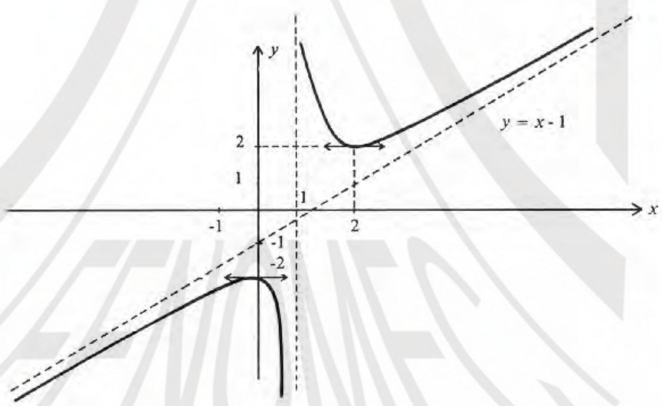

Figura 2.13

EJERCICIOS:

2.5) Haga las gráficas de las siguientes funciones teniendo cuidado que en algunas de ellas la función no está definida para toda x, por ejemplo: $\sqrt{25-x^2}$ está definida sólo para $|x| < 5$ y que en otras la derivada es discontinua.

1. $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$
2. $\dfrac{1}{x} - x$
3. $x^2 + \dfrac{2}{x}$
4. $\dfrac{1}{x^2+1}$
5. $\sqrt{25-x^2}$
6. $\sqrt{x^2}$
7. $27x^3 + \dfrac{1}{x}$
8. $\dfrac{2x+1}{x+5}$
9. $\dfrac{x}{(x+1)^2}$
10. $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$
11. $(x^2+x+1)^{1/3}$
12. $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
13. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$
14. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
15. $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$
16. $(x-1)^{1/3} + (x+1)^{1/3}$
17. $x^{5/3} - x$
18. $(x-1)^2 x^{1/3}$

19. $\sqrt{x^2-1}$

20. $\sqrt{1-x^2}$

Ejemplo 2.6:

Consideremos la función

$$f(x) = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$$

Es fácil ver que $f(x) = (x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}$: $f(x)$ tiene ceros en $x = 1$ y $x = -2$.

Además $f(x) = x\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)^{1/3}$. Cuando x tiende a ∞, $\dfrac{3}{x^2}$ y $\dfrac{2}{x^3}$ tienden a cero y $\frac{f(x)}{x}$ tiende a 1 : $f(x)$ tiene como asíntota la recta $y = x$.

Como $f(x) < x$ es equivalente a $x^3 - 3x + 2 < x^3$ o sea $x > 2/3$. para $x > 2/3$ la recta $y = x$ está arriba de la curva y para $x < 2/3$ la curva está arriba de la asíntota.

Por otra parte:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}(x+2)^{1/3} + \frac{1}{3}(x-1)^{2/3}(x+2)^{-2/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3(x-1)^{1/3}(x+2)^{2/3}}(2(x+2) + (x-1)) = \frac{x+1}{(x+2)^{2/3}(x-1)^{1/3}}$$

f' es discontinua en $x = -2$ y $x = 1$ y tiene el signo de $(x+1)(x-1)$ ya que $\dfrac{x+1}{(x-1)^{1/3}} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^{4/3}}$ con denominador siempre positivo.

Podemos ver que en -2 y 1 tenemos una tangencia vertical y en -1 un máximo local (véase la figura 2.14).

x	$-\infty$		-2		-1		0		$2/3$		1		∞
$f'(x)$	1	$\oplus$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\oplus$	0	$\ominus$	$-2^{-2/3}$	$\ominus$		$\ominus$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\oplus$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4^{1/3}$	$\searrow$	$2^{1/3}$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

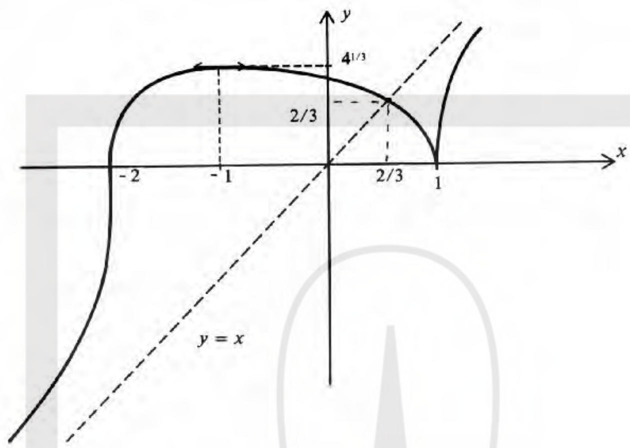

Figura 2.14

Ejemplo 2.7:

En el problema de don Juvencio, sección 3 del capítulo 1, vimos que la derivada de $\frac{G(x)}{V(x)} = H(x) = 8 + \frac{8(4x^2-x-100)}{x(11-2x)^2}$ era:
$H'(x) = \dfrac{64\left(x^3+5x^2-75x+\frac{275}{2}\right).}{x^2(11-2x)^2}$ cuyo signo, para x entre 0 y $\frac{11}{2}$, está dado por el signo de $g(x) = x^3+5x^2-75x+\dfrac{275}{2}$.

Ahora $g'(x) = 3x^2+10x-75$ con ceros en:

$$x_1 = -\frac{5}{3}(\sqrt{10}+1) \text{ y } x_2 = \frac{5}{3}(\sqrt{10}-1) \simeq 3.6$$

x	0		x_2		$\frac{11}{2}$
$g'(x)$	-75	$\ominus$	0	$\oplus$	$\frac{283}{4}$
	$\frac{275}{2}$	$\searrow$	α	$\nearrow$	β

Recordemos que queremos conocer el signo de $g(x)$. Para esto debemos conocer el signo de α y β. Se podría calcular $\alpha \simeq -21$ y $\beta \simeq 43$ o más simplemente:

$g(2) = 15.5 \qquad g(3) = -15.5 \qquad g(4) = -18.5 \qquad g(5) = 12.5$

Entonces como g es decreciente entre 0 y x_2 hay un cero de $g(x)$ entre 2 y 3 y como g es creciente entre x_2 y $\dfrac{11}{2}$ hay otro cero entre 4 y 5.

En el fascículo V veremos cómo usar el método de Newton para calcular con más precisión esos ceros: 2.4037 y 4.7 respectivamente.

Para completar el estudio de $H(x)$, basta ver que si x tiende a 0 siendo positivo, como $4x^2 - x - 100$ tiende a $-100, H(x)$ tiende a $-\infty$. Por otra parte como $4x^2 - x - 100$ vale $\dfrac{31}{2}$ en $x = \dfrac{11}{2}$, cuando x tiende a $\dfrac{11}{2}$ entonces $H(x)$ tiende a $+\infty$.

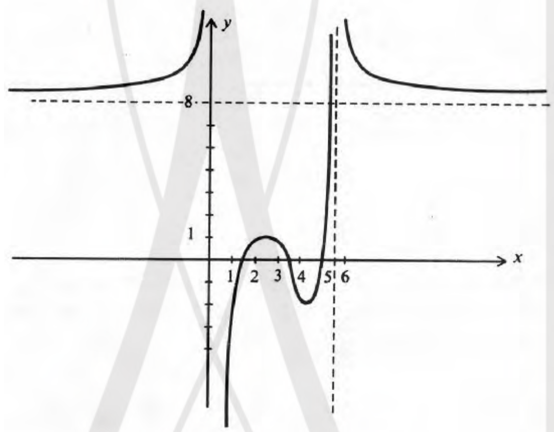

Figura 2.15

EJERCICIO:

Complete la gráfica de $H(x)$ para x fuera del intervalo $\left(0, \frac{11}{2}\right)$.

2.3 APROXIMACIÓN LINEAL

Concluiremos este capítulo indicando cómo la derivada permite hacer cálculos aproximados.

Ya vimos que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) = y_t(x) + r(x)(x - x_0)$$

donde $r(x)$ tiende a 0 si x tiende a x_0 y $y_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es lo que llamamos la aproximación lineal de $f(x)$, siendo la ecuación de la tangente a la curva.

Entonces usaremos el hecho que $f(x) \sim y_t(x)$, para x *cerca* de x_0, para hacer aproximaciones.

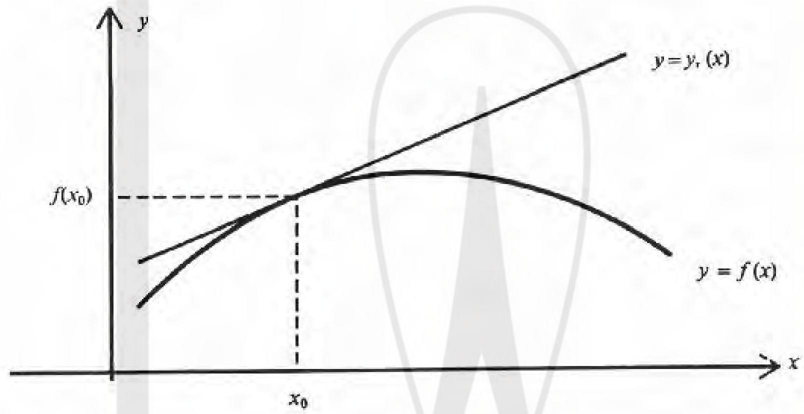

Figura 2.16

Ejemplo 2.8:

Si queremos calcular $\sqrt{65}$ sin recurrir a una tabla, vemos que 65 estando cerca de 64, $\sqrt{65}$ estará cerca de 8. Poniendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $x_0 = 64$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f'(x_0) = \dfrac{1}{16}$ y:

$$\sqrt{65} \sim y_t(65) = 8 + \frac{1}{16} = 8.0625$$

Del mismo modo para $\sqrt{4.02}$ con $x_0 = 4$:

$$\sqrt{4.02} \sim y_t(4.02) = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02 - 4) = 2 + \frac{0.02}{4} = 2.005$$

Ejemplo 2.9:

Si queremos saber cuanto vale $\dfrac{1}{1-h}$ para h pequeño, por ejemplo $\dfrac{1}{0.99}$, tomando $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 1, x = 1 - h$ y con $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ tenemos $\frac{1}{1-h} \sim 1 - \frac{1}{1^2}(1 - h - 1) = 1 + h$ y del mismo modo: $\dfrac{1}{1+h} \sim 1 - h$.

Finalmente: ln $(1+h)$; tomando $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x = 1+h$ y con $f'(x) = \dfrac{1}{x}$: $\ln(1+h) \sim h$.

EJERCICIOS:

2.6) Calcule aproximadamente: $\sqrt[3]{28}$, $\sqrt{257}$, $\sqrt{224}$, $\sqrt[3]{126}$

2.7) Calcule aproximadamente $\dfrac{1}{0.99}$ y $\dfrac{1}{1.05}$, usando el ejemplo 2.9

2.8) Usando la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ calcule aproximadamente $\dfrac{1}{1.05}$ y $\dfrac{1}{2.01}$

2.9) Calcule aproximadamente tan (0.01), sen (0.01), cos (0.01) donde 0.01 está en radianes.

2.10) Calcule aproximadamente $\ln(0.01)$, $\ln(0.95)$, $e^{0{,}01}$, $e^{-0.05}$.

Ahora, como se puede ver en los ejercicios 2.7 y 2.8, podemos clacular aproximadamente $\frac{1}{1.05}$ con dos funciones diferentes, ¿cuál de los dos resultados es el mejor? o, puesto en otras palabras, ¿qué tan buena es cada aproximación, qué tan grande es el error que se comete al tomar el valor aproximado, de qué signo es? ya que no solamente es importante el valor aproximado sino también qué tan lejos está del valor real.

En el fascículo V daremos una respuesta bastante completa a estas preguntas cuyo primer paso veremos a continuación con la ayuda del teorema del valor medio.

Teorema del valor medio

Este resultado, muy importante desde el punto de vista teórico, será probado y usado en los fascículos IV y V. Dice lo siguiente:

Si una función f tiene derivada en todo punto de un intervalo (a,b) y f es continua en los extremos a y b, entonces existe un punto c entre a y b tal que:

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-a} = f'(c)$$

Por ejemplo si $f(a) = f(b)$ el teorema nos dice que hay un punto entre a y b con tangente horizontal, lo cual es geométricamente evidente ya que en $[a,b]$ debemos tener un máximo y un mínimo y estos no pueden estar los dos en a y b a menos que la función sea constante.

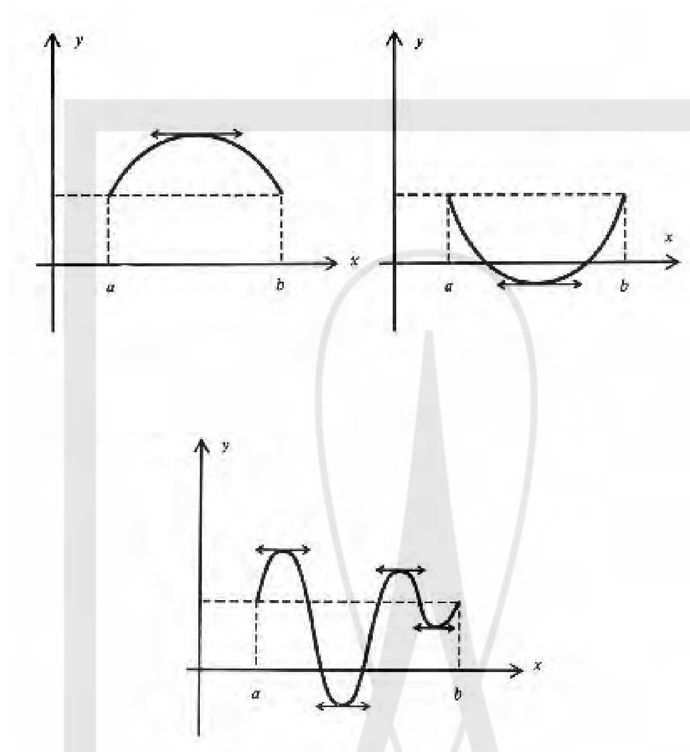

Figura 2.17

De la última gráfica de la figura 2.17 vemos que el punto c no tiene que ser único.

Geométricamente, el teorema de valor medio dice que hay un punto c donde la tangente, de pendiente $f'(c)$, es paralela al segmento que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, de pendiente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Si vemos la gráfica en la dirección perpendicular al segmento, éste es el caso anterior.

EJERCICIO:

2.11) Considerando la función $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ ver que $g(x) = g(b) = f(a)$ y que por el caso anterior existe un punto c tal que $g'(c) = 0$. Ver que ese punto c da el resultado deseado.

Otra manera de entender este resultado es la siguiente: Si $f(t)$ representa la distancia recorrida por un coche, entonces $f(b) - f(a)$ es la distancia recorrida

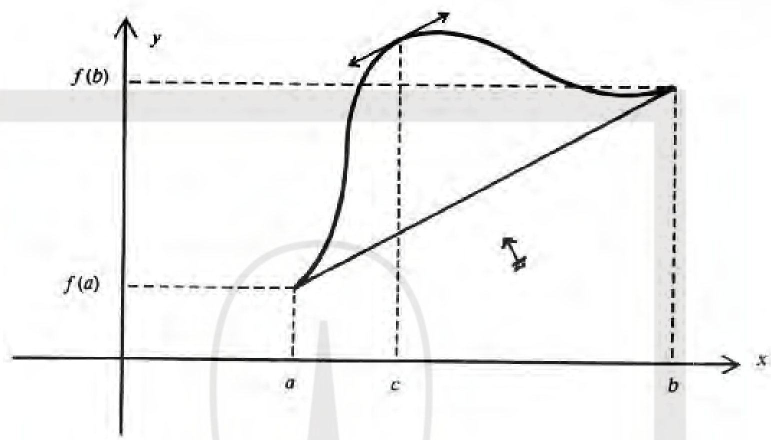

Figura 2.18

entre el tiempo a y el tiempo b y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la velocidad promedio entre esos dos instantes. El teorema dice que en algún momento entre a y b, pueden ser varios, la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio, lo cual parece razonable.

Volvamos a insistir: el teorema del valor medio nos da la existencia de un punto c y nada más: no dice cuánto vale c, ni si hay más de un punto c con esa propiedad (ver los dibujos anteriores). Ahora, ¿cómo nos va a ayudar esto a sacar más información en el problema de aproximación? Evidentemente, no nos va a decir cuál es el error exacto, pero nos dará una estimación, una idea, de qué tan grande es el error y de qué signo es:

Si ponemos $a = x_0, b = x_0 + h$ tendremos un c, entre x_0 y $x_0 + h$, que escribiremos como $x_0 + \theta h$ con $0 < \theta < 1$, tal que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h$$

Entonces como $y_t(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ era el valor aproximado de $f(x_0 + h)$:

$$f(x_0 + h) - y_t(x_0 + h) = (f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0))h$$

es la diferencia entre el valor real y el aproximado.

Aunque no sepamos cuánto vale θ, si por ejemplo sabemos que h es positivo y f' es creciente, sabremos que: $f(x_0+h)-y_t(x_0+h) > 0$: el valor aproximado es menor que el valor real. Pero veamos algunos ejemplos para entender de qué se trata.

Tomando $f(x) = \sqrt{x}$ vemos que:

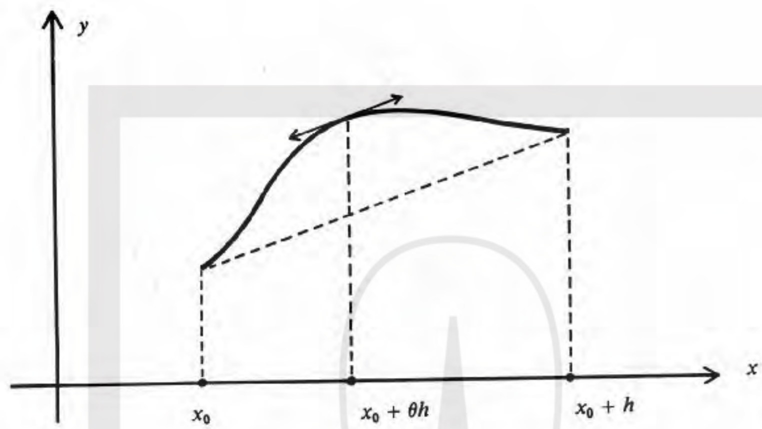

Figura 2.19

$$\sqrt{65} = \sqrt{64} + f'(64+\theta)(65-64) = 8 + \frac{1}{2\sqrt{64+\theta}}$$

con $\sqrt{65} \sim y_t(65) = 8 + \frac{1}{2\sqrt{64}} = 8.0625$

Ahora $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es decreciente, por ejemplo su derivada $-\dfrac{1}{4x^{3/2}}$ es negativa, entonces:

$\dfrac{1}{\sqrt{81}} < \dfrac{1}{\sqrt{64+\theta}} < \dfrac{1}{\sqrt{64}}$

$8 + \dfrac{1}{18} < \sqrt{65} < 8 + \dfrac{1}{16}$

$8.0555 < \sqrt{65} < 8.0625$

Considerando $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x_0 = 1$ vemos que, tomando $h > 0$:

$$\frac{1}{1+h} = 1 - \frac{h}{(1+\theta h)^2} \text{ con } y_t(1+h) = 1 - h$$

Ahora como $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ es creciente con derivada $\frac{2}{x^3}$:

$\dfrac{1}{1+h} - y_t(1+h) = h\left(1 - \dfrac{1}{(1+\theta h)^2}\right)$ es positivo y menor que:

$$h\left(1 - \frac{1}{(1+h)^2}\right) = \frac{h(1+h)^2 - h}{(1+h)^2} = \frac{h^2(h+2)}{(1+h)^2} \leq h^2(h+2)$$

ya que $\frac{1}{1+h} \leq 1$.

Por ejemplo: $\dfrac{1}{1.01}$ tiene valor aproximado $1 - 0.01 = 0.99$ y $0 < \frac{1}{1.01} - 0.99 < (0.01)^2(2.01) \leq 3 \times 10^{-4}$

$$0.99 \leq \frac{1}{1.01} \leq 0.9903$$

EJERCICIOS:

2.12) En cada uno de los ejercicios anteriores, de una estimación del signo y de la magnitud del error.

2.4 CONCLUSIONES

El propósito de este fascículo es el entender lo que es una derivada y para qué sirve. De paso damos algunas reglas de derivación para ayudarnos en los cálculos.

En el fascículo V, además de varias extensiones y cálculos de integrales, ampliaremos nuestro conocimiento del análisis de una función con aproximaciones más finas, utilizando esencialmente el concepto de segunda derivada. De hecho hasta ahora hemos visto la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función. Podemos entonces encontrar los máximos y mínimos locales y tener una idea general de la gráfica. Pero no sabemos, por ejemplo, si la gráfica de $x^2 + ax + b$, no tiene fluctuaciones como en el dibujo:

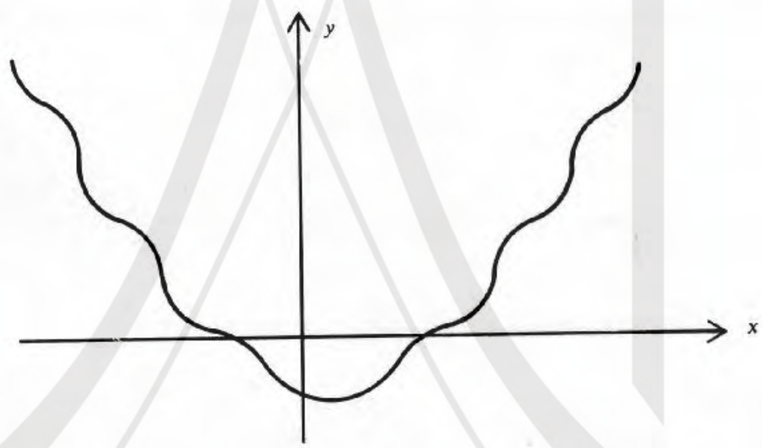

Figura 2.20

Esta gráfica tiene dos raíces, tiende a ∞ cuando x tiende a ∞, decrece hasta un único mínimo y después crece, pero la curva es bastante distinta de una parábola ya que tiene esas ondulaciones, en términos técnicos cambia de concavidad, que son justamente dadas por la segunda derivada, la derivada de la derivada.

Veremos además, en el fascículo VI, el significado físico de la segunda derivada: si un punto móvil se desplaza sobre una recta y $d(t)$ es su distancia, en el momento t, al origen, entonces sabemos que $d'(t)$, la derivada de $d(t)$ representa su velocidad. Ahora bien, la derivada de $d'(t)$, denotada $d''(t)$, o $\Gamma(t)$ en física, representa la aceleración, es decir cómo varía la velocidad. Fue la importantísima contribución de Newton el descubrir que la aceleración está relacionada con las fuerzas aplicadas al móvil:

$$\boxed{\text{Masa} \times \text{acelaración} = \text{fuerzas}}$$

Esta ley de Newton, base de la mecánica y de una buena parte de la física, es un ejemplo de una ecuación diferencial:

$$md''(t) = F$$

donde F puede depender de $t, d(t)$ y $d'(t)$ por ejemplo.

En general una ecuación diferencial es una relación entre una función y sus derivadas. En el fascículo VI estudiaremos en detalle varios modelos matemáticos basados en esta ley o en otras ecuaciones diferenciales simples.

Apéndice I. LÍMITES Y CRECIMIENTO POLINOMIAL

La idea intuitiva de límite es clara y pondremos su definición matemática solamente como recordatorio:

$f(x)$ tiende a un límite L cuando x tiende a x_0 si la diferencia entre $f(x)$ y L se hace pequeña cuando x está cerca de x_0. Esto se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se dice que $f(x)$ es *continua* en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen, entonces es claro que:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$
3. Si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ entonces: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Ahora para saber si hay asíntotas o tangencias verticales en una curva es importante tener bien claro qué término es de más peso o dominante en una expresión, por ejemplo en $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$.

Si x tiende a ∞ vemos que $\dfrac{p(x)}{a_n x^n} = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \dfrac{1}{x} + ... + \dfrac{a_0}{a_n} \dfrac{1}{x^n}$ tiende a 1 ya que $\dfrac{1}{x}, --, \dfrac{1}{x^n}$ tienden a 0. Entonces para x muy grande $p(x)$ se comporta como $a_n x^n$. Por ejemplo, al considerar un cociente de polinomios

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + ----+ a_0}{b_m x^m + ----+ b_0}$$

este se comportará para $|x|$ grande como $\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$.

Entonces si $n-m=0$, tendremos un asíntota horizontal $y=\dfrac{a_n}{b_n}$. Si $n-m>0$, el cociente tenderá a $\pm\infty$ según el signo de $\dfrac{a_n}{b_m}$ y si $n-m<0$, el cociente tenderá a 0.

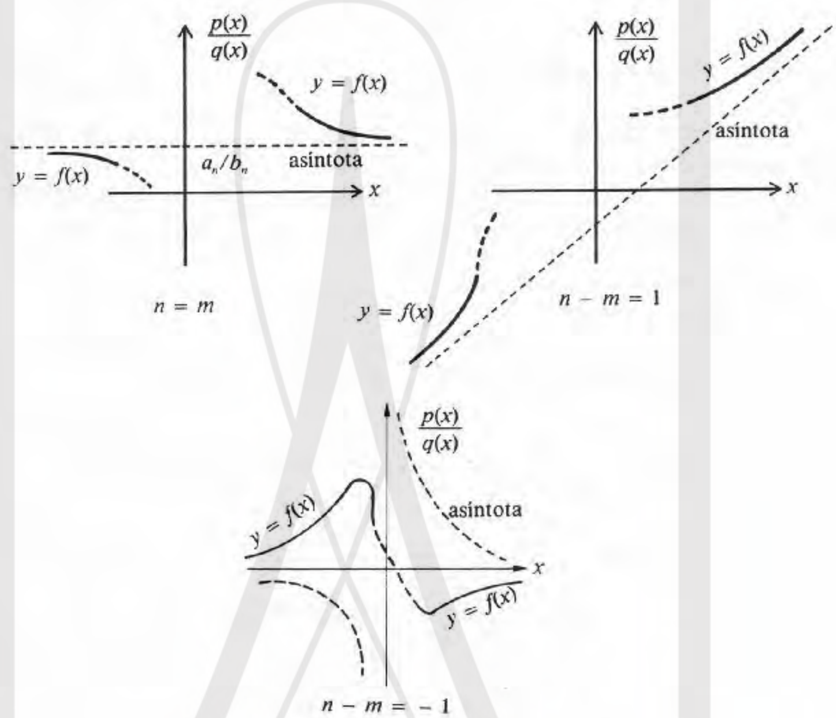

Figura A.1

Del mismo modo si x tiende a 0, $\dfrac{p(x)}{q_1(x)}=\dfrac{a_nx^n+...+a_0}{x^k(b_mx^m+...b_0)}$ se comportará como $\dfrac{a_0}{b_0}\dfrac{1}{x^k}$ y tendremos una asíntota vertical, si k es positiva, en $x=0$.

Esto se puede resumir en el hecho de que cuando $|x|$ tiende a ∞ los términos más importantes son los de mayor grado, mientras que si x tiende a 0, los de menor grado son dominantes.

Esto se puede ver también recordando que si $x>1$ entonces $x^n>x^{n-1}$ y si $0<x<1, x^n<x^{n-1}$

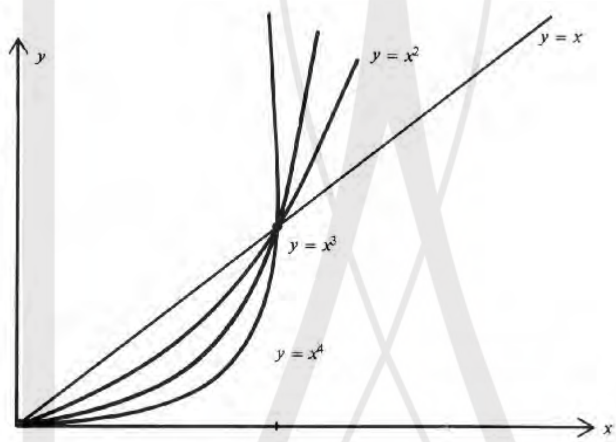

Figura A.2

Apéndice II. TABLA DE DERIVADAS

$(u+v)' = u' + v'$	$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	

$(const.)' = 0$	
$(x)' = 1$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^{-n})' = -nu^{-n-1}u'$
$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$	$(u^{1/n})' = \frac{1}{n}u^{1/n-1}u'$
$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$	

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\operatorname{sen} u)' = (\cos u)u'$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\cos u)' = -(\operatorname{sen} u)u'$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u)u'$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$

$(\text{Arc } \operatorname{sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\text{Arc } \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\text{Arctan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$

NOTA: No es necesario aprender estas fórmulas sino entenderlas.

Índice Alfabético