Banco de problemas

M.C. Jorge y A.A. Minzoni

Transcripción de Juan Carlos Hidalgo, Luis Mier y Terán y Luis Angel Alarcón

www.fenomec.unam.mx

Índice

BANCO DE PROBLEMAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS AVANZADAS DE LA FÍSICA

1. Sistemas Discretos

1.1 Considere el sistema masa-resorte que se muestra en la Figura 1.1.

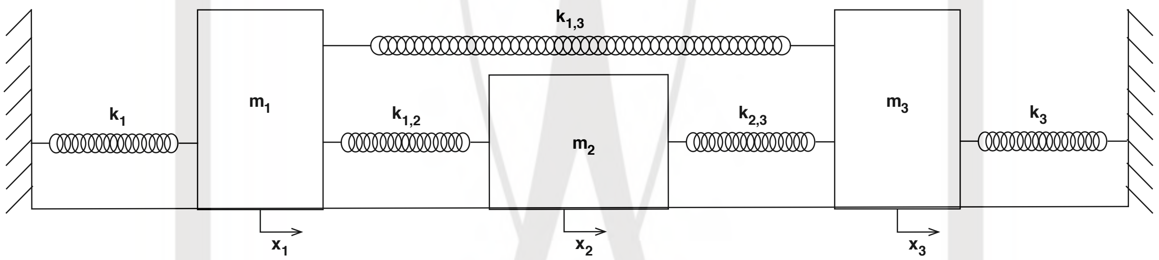

Figura 1.1.

Sea x_i el desplazamiento de la masa m_i, sujeta a los resortes con constantes de restitución k_i, $i = 1, 2, 3$.

a) Encontrar en forma matricial la ecuación diferencial que describe las oscilaciones del sistema.

b) ¿Cuál es la diferencia entre este sistema y el modelado por la matriz de *Rayleigh*?

c) Encuentre los valores y vectores propios del sistema si todas las masas y constantes del resorte se suponen iguales a uno.

d) Encuentre las solución general para **c)**. Note que no se especifican condiciones iniciales para el problema, por lo que su solución debe contener constantes indeterminadas.

1.2 Considere el sistema de dimensión finita

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{F}\cos(\omega t); \quad \mathbf{F} = (f_1, f_2, ..., f_N)^{\top} \quad \text{con } f_1,\ f_2,\ ...,\ f_N \text{ constantes,}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} \text{ matriz de } \textit{Rayleigh } N \times N.$$

a) Resolver para $\mathbf{x}(t)$.

b) Discutir la dinámica del sistema. ¿Qué ocurre cuando $\gamma \longrightarrow 0$ y ω es una de las frecuencias naturales de oscilación del sistema?

1.3 Sea $\mathbf{R}_n$ la matriz de *Rayleigh* de $n \times n$. Demostrar que:

$$det(\mathbf{R}_n) = n + 1, \qquad \forall n.$$

Encuentre la inversa de $\mathbf{R}$.

1.4 Resolver el sistema de osciladores acoplados dados por la matriz de *Rayleigh* $(N-1) \times (N-1)$, para las condiciones de frontera de Neumann, dadas por:

$$x_0 = x_1, \qquad x_{N-1} = x_N.$$

Estas condiciones son la forma discreta de las condiciones $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$, donde x se encuentra en el intervalo $(0, L)$, el cual se divide en subintervalos de longitud L/N. Explique por qué.

1.5 Considere el problema de $N-1$ masas acopladas que experimenta un efecto de ficción, $\gamma\dot{\mathbf{x}}$, $\gamma = cte$, $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{N-1}(t))^\top$, escriba las nuevas ecuaciones de movimiento y encuentre la solución general para todos los casos posibles de γ.

Para facilitar el cálculo considere $m = k = 1$.

1.6 Considere la ecuación en diferencias de segundo orden dada por:

$$x_{m+1} + px_m + qx_{m-1} = 0 \tag{1.1}$$

a) Para el caso $p^2 < 4q$ demuestre que la solución de (1.1) es:

$$x_m = |r|^m (C_1 \cos(m\theta) + C_2 \operatorname{sen}(m\theta)), \quad r = x + iy, \quad x = -p/2, \quad y = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

$$\theta = \arctan(y/x), \quad |r| = \sqrt{q}.$$

b) Para el caso $p^2 = 4q$, demuestre que $x^m = r^m$ satisface la ecuación:

$$x_{m+1} + px_m + qx_{m-1} = r^{m-1}(r + p/2)^2, \tag{1.2}$$

y de esto que una solución es $x_m = (-p/2)^m$. Para obtener una segunda solución derive (1.2) respecto a r y demuestre que:

$$y_m = \frac{\partial x_m}{\partial r}\Big|_{r=-p/2} \qquad \text{es una solución de (1.1)}$$

Así, la solución general de la ecuación (1.1) está dada por:

$$x_m = C_1\Big(-\frac{p}{2}\Big)^m + C_2 m\Big(-\frac{p}{2}\Big)^m.$$

1.7 Resolver la ecuación en diferencias y escribir su solución general en términos de x_0 y x_1 (donde x_0 y x_1 son arbitrarias).

a) $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$

b) $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$

c) Extienda los resultados anteriores al caso de la ecuación de tercer orden

$$x_n - 4x_{n-1} + 5x_{n-2} - 2x_{n-3} = 0,$$

escriba la solución general en términos de x_0, x_1 y x_2.

1.8 Considere el sistema masa-resorte mostrado en la Figura 1.2

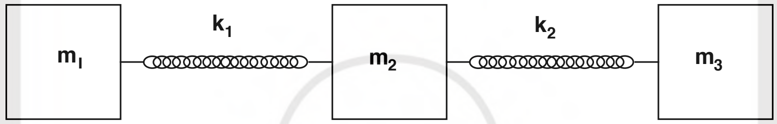

Figura 1.2.

a) Escriba las ecuaciones de movimiento justificándolas.

b) Resuelva el sistema si todas las masas y todas las constantes de rigidez son iguales a uno.

c) Encuentre la solución para las condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}(0) = (1/2, 0, -1/2)^\top, \qquad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, 1, -1)^\top.$$

d) Encuentre la fórmula para la energía total del sistema indicando la energía cinética y la potencial. Verifique que la energía se conserva.

1.9 La ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica que modela la partícula libre, tiene una versión discreta para la partícula en una caja dada por el sistema:

$$i\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{R}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{R} = \text{matriz de Rayleigh}.$$

Resuelva el sistema anterior para $\mathbf{x}$ de dimensión tres.

Considere el caso particular de fuerza externa $\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_k \cos \omega t$, donde $\mathbf{e}_k$ es el $k-$ésimo vector fundamental. ¿Qué pasa si ω es una de las frecuencias naturales del sistema? Explique la física del problema.

1.10 Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los valores y vectores propios de A y B. Analícelos considerando $\epsilon > 0$ y $\epsilon = 0$.

1.11 Sea

$$A = \begin{pmatrix} p & -p & 2 \\ -p & p+2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para qué valores de p es A hermitiana y definida positiva. Encuentre sus valores y vectores propios.

1.12 Considere las vibraciones de una molécula de tres átomos modelada por tres masas unidas por dos resortes. Si el resorte que une las masas 1 y 2 tiene constante $2k$ y el resorte que une las masas 2 y 3 tiene constante $3k$, repita el ejercicio hecho en clase. Es decir encuentre el sistema que modela el movimiento de las tres masas, encuentre los valores y vectores propios de la matriz del sistema y escriba la solución general. Explique el significado de los modos fundamentales de vibración.

1.13 Resuelva el sistema lineal de $N-1$ partículas con masas y constantes de resorte iguales, sujetas en los extremos, añadiendo el término de fricción lineal y una fuerza externa. Es decir:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + k\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}.$$

Considere el caso particular de fuerza externa $\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_k \cos\omega t$, donde $\mathbf{e}_k$ es el $k-$ésimo vector fundamental. ¿Qué pasa si $\gamma \to 0$ y ω es una de las frecuencias naturales del sistema? Explique la física del problema.

1.14 Considere el sistema:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} \quad \text{matriz de Rayleigh}$$

Hallar la solución en términos de sus valores y vectores propios.

Discutir la Física del problema.

¿Qué pasa con las frecuencias naturales de oscilación cuando $m = m_1$ y $m_1 \longrightarrow 0$? ¿Y cuando $m = m_1$ y $m_1 \longrightarrow \infty$?

2. Series de Fourier

2.1 Encuentre la serie coseno de Fourier para $f(x) = \operatorname{sen}(x), 0 < x < \pi$. Utilice este resultado para escribir $\frac{1}{2}$ como una serie de recíprocos de enteros impares.

2.2 Sea $f(x) = \delta(x)$ la función delta de Dirac definida en $(-\pi, \pi)$. Encuentre su expasión en series de Fourier.

2.3 Sea $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$ tal que la serie converge uniformemente $\forall x$. Qué conclusiones se pueden obtener sobre los coeficientes a_n, b_n si f satisface:

a) $f(\pi - x) = f(x)$

b) $f(\frac{\pi}{2} + x) = f(x)$

2.4 Hallar la serie de Fourier de $f(x) = e^{ax}$, con $a \neq 0$ y $-\pi < x < \pi$. De esta serie encuentre la serie para $\operatorname{senh}(x)$, en el mismo intervalo.

2.5 De la serie *coseno* de Fourier para $x^2 \in (0, \pi)$ demuestre:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

2.6 Determine si la serie de Fourier de las funciones siguientes converge uniformemente. Justifique su respuesta.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + |\operatorname{sen}(x)|;\ -\pi < x < \pi$

b) $f(x) = e^x;\ -1 < x < 1$

2.7 La parte real de $g(x) = \ln(1 + e^{ix})$ es $\ln[2\cos(x/2)]$ para $x \in (-\pi, \pi)$. Utilizando el desarrollo en serie de *Taylor* para $g(x)$ demuestre:

$$\ln|2\cos(x/2)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(x); \qquad x \neq (2n+1)\pi; \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

¿Se puede diferenciar esta serie de Fourier término a término? Justifique su respuesta.

Evaluar la integral:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln|2\cos(x/2)|)^2\, dx$$

2.8 Considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < \pi$. Demuestre que los coeficientes de su serie seno de Fourier tienden a una constante cuando $n \to \infty$.

2.9 Sea

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad -\pi < x < \pi.$$

a) La serie de Fourier correspondiente a $f(x)$, ¿converge en todo punto? Justifique su respuesta.

b) ¿A qué valor converge, si es que lo hace, para $x = 0$, $x = \pi$?

c) La serie, ¿es uniformemente convergente? Explique.

2.10 Sea $f(x) = 0$ si $-\pi \leqslant x < 0$ y $f(x) = 1$ si $0 \leqslant x \leqslant \pi$, su serie de Fourier está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}, \qquad 0 < x \leqslant \pi.$$

SIN INTEGRAR, encuentre la serie de Fourier de $g(x) = 1$ si $-\pi \leqslant x < 0$, $g(x) = 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Utilizando su resultado y la identidad de Parseval demuestre que:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{(2n-1)^2} + ...$$

2.11 Demuestre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(nx) = \frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}, \qquad |a| < 1cente$$

Sugerencia. No trate de expandir en serie de Fourier.

2.12 Encuentre los errores en la siguiente demostración, corríjalos y sin integrar encuentre a_n.

Se desea encontrar los coeficientes de la serie coseno de Fourier para $f(x) = e^x$ en el intervalo (0,l).

$$e^x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{2.1}$$

Derivando se obtiene la serie seno de Fourier.

$$e^x = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{2.2}$$

Derivando de nuevo se tiene:

$$e^x = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\frac{n\pi}{l})^2 \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Como las ecuaciones (1) y (2) dan los coeficientes coseno de Fourier de e^x estos deben ser idénticos, así:

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0$$

¡Resultado obviamente incorrecto!

2.13 Dé una razón de análisis dimensional por la cual el núcleo de *Dirichlet* converge a la δ de *Dirac* y compare con el análisis hecho en clase.

2.14 Pruebe que el conjunto de funciones $\{1/\sqrt{c}, \quad \sqrt{\frac{2}{c}}\cos(\frac{n\pi x}{c})\}$ es ortonormal en el intervalo $(0, c)$. Utilice lo anterior para probar que $\{1/\sqrt{2c}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}}\cos(\frac{n\pi x}{c})\}$ es ortonormal en $(-c, c)$.

2.15 Cuáles de la siguientes funciones son continuas, seccionalmente continuas o seccionalmentes suaves en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

a) $f(\theta) = \csc\theta$

b) $f(\theta) = (\sin\theta)^{4/3}$

c) $f(\theta) = \begin{cases} (\operatorname{sen}\theta)^{1/5}, & \theta < \frac{\pi}{2}; \\ \cos\theta, & \theta \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

2.16 Desarrolle en serie de Fourier **SIN INTEGRAR**. Justifique su respuesta.

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} 4x \cos 2x$

2.17 Desarrolle $f(\theta)$ en serie de Fourier y grafique la función que representa dicha serie.

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi < \theta < 0 \\ \\ \operatorname{sen}\theta, & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

a) ¿Qué pasa en $\theta = 0$?

b) Analice la convergencia uniforme de la serie de Fourier, determine dónde es diferenciable y escriba la función que representa la derivada de la serie.

2.18 Cuantas derivadas podría garantizar que tienen las funciones:

a) $f(\theta) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{13\cdot 2+2n^6-1}}$

b) $f(\theta) = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{\cos 2^n\theta}{2^n}$

2.19 Utilice la serie de *Taylor* de e^z para demostrar:

$$e^{e^{ix}} = \Big(1 + \cos x + \frac{\cos 2x}{2!} + ... + \frac{\cos nx}{n!} + ...\Big) + i\Big(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2!} + ... + \frac{\operatorname{sen} nx}{n!} + ...\Big).$$

Con el resultado anterior encuentre la serie de Fourier para:

$$e^{\cos x}\cos(\operatorname{sen} x), \qquad e^{\cos x}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x).$$

¡CUIDADO! No hay necesidad de integrar, no lo intente.

2.20 Demostrar que $f(x) = x^{1/3}$, $-\pi < x < \pi$, no tiene derivadas unilaterales en $x = 0$. Sin encontrar la serie de Fourier establezca por qué esta serie converge a $f(x)$ en $(-\pi, \pi)$ incluyendo el punto $x = 0$. Esto ilustra el hecho de que la condición f seccionalmente suave no es una condición necesaria para la convergencia.

2.21 Encuentra la serie *seno* y *coseno* de Fourier para $f(x) = \operatorname{senh} x$, $0 < x < 1$. Dibuje las gráficas de las funciones a las que converge cada serie.

2.22 Utilice las tablas de series de Fourier probar que:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}\coth b\pi - \frac{1}{2b^2}$

Utilice valores apropiados para θ.

2.23 Evalúe las siguientes series usando la igualdad de *Parseval* y las tablas de series de Fourier.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(na)}{n^4}, \quad 0 < a < \pi$

2.24 Suponga que $\{\phi_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(a,b)$. Sean $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ y defina $\psi_n(x) = \sqrt{c}\phi_n(cx+d)$. Demuestre que $\{\psi_n\}$ es una base ortonormal para $L^2\big((a-d)/c, (b-d)/c\big)$

2.25 Dada la completez de $\{e^{inx}\}$ en $[-\pi, \pi]$, deduzca la completez de $\{\cos nx\} \bigcup \{\operatorname{sen} nx\}$ en $[-\pi, \pi]$ y la completez de $\{\cos nx\}$ y $\{\operatorname{sen} nx\}$ en $[0, \pi]$.

2.26 Considere la sucesión de funciones S_m, $m = 1, 2, 3, ...$ definidas en el intervalo $[0, 1]$ como:

$$S_m(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{m}; \\ 1, & x \neq 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{m} \end{cases}$$

Demuestre que $S_m \longrightarrow f(x) = 1$ en $(0,1)$ en norma pero $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $S_m \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$.

2.27 Se sabe que $\{\operatorname{sen}(n\pi x)\}$ es ortonormal para $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Demuestre que este conjunto no es completo en el espacio de funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$.

2.28 ¿Cuál es la mejor aproximación en norma a la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, \pi]$, de entre todas las funciones de la forma $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$?

2.29 Demuestre que la sucesión $\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{sen} 3x, \ldots$ es ortogonal en el espacio $C[0, 2\pi]$.

2.30 Demostrar que si $(f, g) = 0$ entonces

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

¿Qué sucede si $(f, g) \neq 0$?

2.31 Encuentre la serie de Fourier de $f(\theta) = \theta(2\pi - \theta)$ en el intervalo $0 < \theta < 2\pi$.

2.32 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

para $n = 0$ conteste:

a) ¿La función es acotada?

b) ¿Es $f(x)$ acotada en cada intervalo de longitud finita?

c) ¿$f(x)$ es continua por pedazos?

d) ¿$f(x)$ es suave por pedazos?

e) Conteste las mismas preguntas para $n = 1$ y $n = 2$.

Justifique todas sus respuestas.

2.33 En el intervalo $(0, \pi)$ se define la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2; \\ \pi/2, & \pi/2 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

Dibuje la extensión par y la extensión impar 2π-periódica de $f(x)$.

ÚNICAMENTE utilizando la serie de $f(x)$.

2.34 Sea $f(x)$ en $-l < x < l$, una función impar tal que $f(l - x) = f(x)$. Demostrar que si $\{A_n, B_n\}$ son los coeficientes de su serie de Fourier entonces $A_n = 0$, $\forall n$ y $B_n = 0$ para n par.

2.35 Pruebe que la serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\right)$$

puede escribirse como

$$\frac{1}{2}\rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos\left(nx + \theta_n\right), \tag{2.3}$$

donde $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Dé la expresión para θ_n en términos de a_n y b_n.

Suponiendo que $\rho_n \geqslant 0$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n |\cos(nx + \theta_n)| \leqslant \mu$ para $a \leqslant x \leqslant b$, demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$.

Sugerencia. Integre (2.3) de a a b. Utilice la desigualdad

$$|\cos(nx + \theta_n)| \geqslant \cos^2(nx + \theta_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nx)\cos(2\theta_n) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2nx)\operatorname{sen}(2\theta_n)$$

y aplique el lema de *Riemann-Lebesgue*.

2.36 Sea $f(\theta)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ i. e. f es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$. Sean a_n y b_n los coeficientes coseno y seno de Fourier de f, respectivamente. Demuestre que $a_n = 0$ para n impar y $b_n = 0$ para n par.

2.37 Sea $\{\varphi_n\}$ un conjunto ortonormal en $SC(0, l) = \{$funciones seccionalmente continuas en $(0, l)$ $\}$ y sean φ_n^+ y φ_n^- las extensiones par e impar de φ_n en el intervalo $[-l, l]$. Demostrar que $\{2^{-1/2}\varphi_n^+\} \bigcup \{2^{-1/2}\varphi_n^-\}$ es un conjunto ortonormal en $SC(-l, l)$.

2.38 Considere la serie de Fourier:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{4n^2 - 1}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{2.4}$$

a) Dibuje la función a la que converge la serie. ¿Lo hace uniformemente?

b) Sabemos que:

$$\cos\theta = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = -\int_{-\pi/2}^{\theta} \operatorname{sen}\phi \, d\phi.$$

Demuestre que la serie (2.4) puede derivarse e integrarse término a término.

c) Aparentemente en el inciso **b)** se obtienen dos series de Fourier distintas para $\cos\theta$, $0 < \theta < \pi$. ¿Cómo se pueden reconciliar estas expresiones?

Sugerencia: $\theta = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n}$ para $0 < \theta < 2\pi$.

3. Separación de Variables

3.1 Demostrar que el conjunto de funciones $\left\{\sqrt{2/l}\,\text{sen}(n-1/2)(\pi x/l)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal en el intervalo $(0,l)$.

3.2 Hallar constantes a,b,A,B,C tales que las funciones: $f_0(x)=1$, $f_1(x)=ax+b$, $f_2(x)=Ax^2+Bx+C$, formen un conjunto ortonormal en $L^2_{\varphi}(0,\infty)=\{$ funciones de clase L^2 en $(0,\infty)$ con función de peso $\varphi(x)=e^{-x}\}$.

Sugerencia: Primero demuestre:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$$

3.3 Sea $f\in C^1(\pi,-\pi)$, $2\pi-$periódica y real. Demostrar que f' es ortogonal a f en $L^2(\pi,-\pi)$.

3.4 Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjunto de funciones lineales independientes definidas en $[a,b]$. Definimos el conjunto $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante el proceso de Gram-Schmidt

$$g_0=f_0,\quad g_1=f_1-\frac{(f_1,g_0)}{\|g_0\|^2}g_0,\quad g_2=f_2-\frac{(f_2,g_1)}{\|g_1\|^2}g_1-\frac{f_2,g_0}{\|g_0\|^2}g_0,\ldots$$

Interprete geométricamente este proceso. Pruebe que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal y $\|g_n\|\neq 0$, $\forall n$. Aplique este proceso al conjunto $\{1,x,x^2,\ldots\}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, para hallar los polinomios de Legendre con la condición de normalización $P_n(1)=1$, $\forall n$.

Demuestre que una función no cero es ortogonal a todas las $f_n \iff$ es ortogonal a todas las g_n.

Demuestre que $\{f_n\}$ es completo $\iff \{g_n\}$ es completo.

3.5 Resuelva por separación de variables la ecuación de la cuerda vibrante de longitud l fija sólo en uno de sus extremos.

$$u_{tt}=c^2u_{xx},\qquad u(0,t)=0,\qquad u_x(l,t)=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad u_t(x,0)=\text{sen}\,x$$

Analice con cuidado el signo de los valores propios.

3.6 Encuentre las vibraciones de la cuerda fija en sus extremos $x=\pm l$, si su desplazamiento inicial tiene la forma que muestra la Figura 3.1 y la velocidad inicial es cero para todo punto.

3.7 Considere el problema de *Dirichlet* para la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant \pi,\quad t\geqslant 0 \tag{3.1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad \forall t\geqslant 0;\qquad u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=0.$$

Demostrar que la solución en serie puede escribirse como la solución de *D'Alembert*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big(f(x-ct)+f(x+ct)\Big).$$

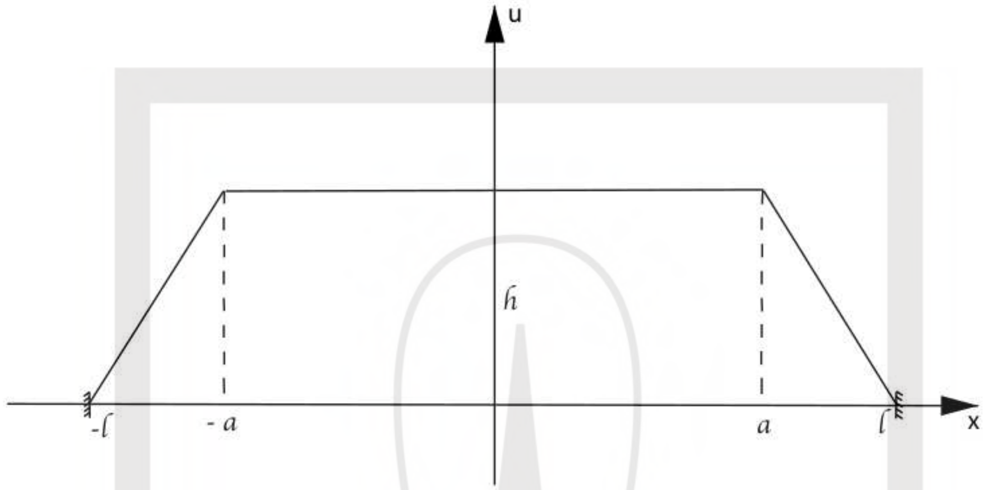

Figura 3.1. Desplazamiento inicial para la cuerda del ejercicio 3.6

Comente el significado físico de esta solución.

3.8 Resuelva por separación de variables:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0$$

$$u(0,t) + pu_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) + qu_x(\pi,t) = 0; \qquad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

Examine qué pasa cuando p y q tienden a cero, o cuando tienden a infinito. Considere todas las posibilidades.

3.9 Uno de los extremos de una banda elástica de longitud l se fija en $x = 0$ y el otro extremo se extiende de su posición inicial $x = l$ a $x = (1+b)l$. Así un punto arbitrario x se mueve al punto $(1+b)x$ de modo que su desplazamiento del punto de equilibrio está dado por bx Al tiempo $t = 0$ los extremos de la banda se sueltan, de este modo: $u(x,0) = bx$ y $u_t(x,0) = 0$.

a) Hallar el desplazamiento $u(x,t)$ para tiempos $t > 0$.

b) Demuestre que la velocidad en el extremo izquierdo de la banda toma alternadamente los valores bc y $-bc$ sobre intervalos de longitud l/c. En otras palabras:

$$u_t(x,0) = bc \quad \text{para} \quad \frac{2ml}{c} < t < \frac{(2m+1)l}{c}, \quad m = 0,1,2,...$$

$$u_t(x,0) = -bc \quad \text{para} \quad \frac{(2m+1)l}{c} < t < \frac{(2m+2)l}{c}, \quad m = 0,1,2,...$$

Sugerencia. Consulte tablas de series de Fourier.

3.10 Considere la ecuación de onda en tres dimensiones.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \qquad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{3.2}$$

En coordenadas cilíndricas, si $u = u(r,t)$ la ecuación (3.2) resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)$$

Encuentre la solución por separación de variables.

3.11 Considere la ecuación de calor:

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < c,\ \forall\, t > 0; \qquad u_x(0,t) = 0; \quad u_x(1,t) = 0.$$

Poniendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ encuentre la solución por separación de variables en forma de una serie infinita.

3.12 Considere el problema de conducción de calor para una barra conductora de material homogéneo con longitud l. El extremo izquierdo de la barra se mantiene a temperatura constante cero mientras que el extremo derecho se aísla para que no escape el calor.

Inicialmente la distribución de temperatura $u(x,0) = f(x)$ donde $f(x)$ está definida como $T_1 x/l$ para $0 \leqslant x \leqslant l$, T_1 constante.

a) Encuentre la ecuación diferencial que describe a la temperatura $u(x,t)$ suponiendo que la sección transversal de la barra es uniforme y la temperatura no varía en dicha sección.

b) Defina las condiciones iniciales y de frontera.

c) Resuelva por separación de variables indicando los valores propios y funciones propias.

d) Utilice series de Fourier para dar una solución completa del problema.

3.13 Un alambre delgado de longitud $2L$, cuya superficie lateral está aislada, se curva formando una circunferencia como se muestra en la Figura 3.2. suponga que los extremos del alambre están conectados entre sí de manera que la temperatura y el flujo de calor son continuas y no hay pérdida alguna de calor.

a) Establezca la ecuación diferencial que modela la difusión de calor en el alambre.

b) Dada una temperatura inicial $f(x)$, resuelva el problema.

3.14 Resolver la ecuación de calor con fuentes independientes del tiempo dada por:

$$u_t = k u_{xx} + Q(x), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = f(x).$$

a) $Q(x) = k, \quad u(0,t) = A, \quad u(L,t) = B.$

b) $Q(x) = \operatorname{sen}\dfrac{2\pi x}{L}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0.$

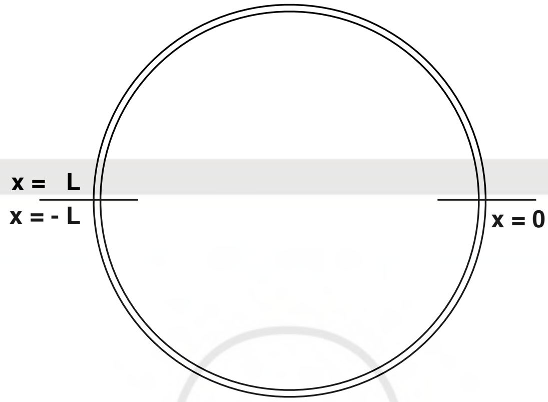

Figura 3.2. Circunferencia de alambre correspondiente al ejercicio 3.13

Analizar los límites cuando t tiende a infinito en ambos casos.
Si no existe equilibrio explicar por qué y reducir el problema a uno con condiciones homogéneas de contorno.

3.15 Considere fuentes de calor independientes del tiempo para la ecuación

$$u_t = ku_{xx} + Q(t), \qquad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas dado que

$$u_x(0,t) = A(t) \quad y \quad u_x(L,t) = B(t).$$

3.16 La temperatura inicial en la esfera sólida, $r \leqslant 1$, es $f(\cos\theta)$ independiente de r y ϕ. La temperatura $u(r,\theta,t)$ satisface:

$$r^2\frac{\partial u}{\partial t} = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})$$

con condiciones de continuidad usuales. Si $u = 0$ cuando $r = 1$ separe variables, $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y encuentre R, Θ y T.

3.17 Modelar la difusión de calor para una sartén sobre un quemador circular (fuente de calor). Utilice la ley de enfriamiento de *Newton*, $u_r = \lambda u$, en la frontera para encontrar la solución estacionaria.

¿Qué pasa cuando $\lambda \longrightarrow 0$? Discuta la física del problema.

3.18 Encuentre la solución del problema de la carpa de circo (ver notas de MAF) amarrada en ambos círculos (arriba y abajo),

$$\triangle u = q, \quad q > 0 \qquad b < r < a, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

$$u(a,\theta) = \beta\cos M\theta, \quad u(b,\theta) = h + \gamma\operatorname{sen} N\theta, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

3.19 Considere el problema de la carpa de circo. Suponga que se refuerza la carpa por medio de costuras en las direcciones radial y angular cuyas tensiones respectivas son T_1 y T_2. En este caso la ecuación que modela este hecho está dada por:

$$T_1\big[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\big] + T_2\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \rho g, \quad b < r < a, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

donde ρ es la densidad y g la constante gravitacional.

a) Resolver la ecuación para $u(a, \theta) = 0$, $u(b, \theta) = h + \gamma \operatorname{sen} N\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

b) Qué pasa con la forma de la carpa si $T_1 \gg T_2$.

c) Qué pasa con la forma de a carpa si $T_2 \gg T_1$.

d) Calcular el esfuerzo en el punto de amarre de la parte superior. ¿Cuándo es este esfuerzo máximo?

3.20 Resolver el problema de la oreja de conejo (ver notas de MAF) cuando en las caras superior e inferior de más área se cambian las condiciones de frontera tipo *Dirichlet* a las condiciones de frontera dadas por la ley de enfriamiento de *Newton*.

3.21 Una placa cuadrada tiene sus caras y sus orillas, $x = 0$, $x = \pi$, aisladas $(0 < y < \pi)$. Sus lados, $y = 0$, $y = \pi$ $(0 < x < \pi)$ se mantienen a temperatura cero y $f(x)$ respectivamente. Encuentre la temperatura estacionaria.

3.22 Demuestre que la ecuación de *Poisson* con condiciones de *Dirichlet*,

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n;$$

$$u(\mathbf{x_0}) = g(\mathbf{x_0}), \qquad \mathbf{x_0} \in \mathcal{S},$$

tiene a lo más una solución (donde $\mathcal{S}$ es la frontera del volumen $\mathcal{V}$).

3.23 Resolver

$$\Delta u = -1, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a; \qquad u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b.$$

3.24 Encuentre una solución particular para la ecuación

$$\Delta u = -\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

3.25 ¿Se puede utilizar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema?

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < c, \quad 0 < \theta < \alpha$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \alpha) = 0.$$

Si su respuesta es afirmativa encuentre las funciones y valores propios, en caso negativo justifique.

3.26 De la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

obtenga la fórmula de conservación de energía:

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^\pi$$

donde E es la energía total dada por la suma de la energía cinética y la energía potencial definidas por:

$$T = \int_0^\pi \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 dx$$

$$U = \int_0^\pi \frac{c^2}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 dx$$

respectivamente.

Para la cuerda fija en sus extremos, $x = 0$ y $x = \pi$, encuentre la energía de un modo normal.

3.27 Considere una cuerda ligeramente amortiguada que satisface la ecuación:

$$\rho_0 u_{tt} = T_0 u_{xx} - \beta u_t, \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Resolver por separación de variables suponiendo que β es relativamente pequeño ($\beta^2 < 4\pi^2\rho_0 T_0/L^2$). Explicar brevemente el signo de β.

3.28 Considere el siguiente problema de valores propios:

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(\pi) - 2\phi'(0) = 0 \tag{3.3}$$

Demostrar que en general $\displaystyle\int_0^\infty (uv'' - u''v)dx = 0$, para todas las u, v que satisfacen la ecuación (3.3). Hallar los valores propios positivos y negativos. ¿Es $\lambda = 0$ un valor propio? ¿Podrían existir otros valores propios? Explique brevemente.

3.29 Resuelva la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u_x(0,t), \quad u(1,t) = -u_x(1,t), \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

No podrá encontrar los valores propios de forma exacta, simplemente indíquelos de manera gráfica y dé las funciones propias correspondientes.

3.30 Considere el problema de valores propios

$$y'' - sy = 0, \quad 0 < x < 1, \quad s > 0,$$

$$y'(0) + ky(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Mostrar gráficamente cuáles son los valores propios para los casos $k > 0$ y $k < 0$.

3.31 Resolver:

$$\nabla^2 v = 0, \qquad 0 \leq r < c, \qquad 0 < \theta < 2\pi,$$
$$v(r,0) = 0, \qquad v(r,2\pi) = 0, \qquad 0 \leq r < c,$$
$$v(c,\theta) = f(\theta), \qquad 0 < \theta < 2\pi.$$

¿Qué modela esta ecuación? Haga un dibujo de la región estudiada indicando las condiciones dadas.

3.32 Considere la ecuación de onda forzada:

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx} + Ax, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0 = u(1,t), \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Suponga la solución $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$ y encuentre ϕ que convierta a una ecuación homogénea para $v(x,t)$. Resuelva para $v(x,t)$ y finalmente obtenga la solución $u(x,t)$.

Sugerencia. Utilice la solución de *D'Alembert*.

3.33 Considere un cuadrado Ω de material homogéneo de 4 unidades de lado cuya frontera se conserva a temperatura cero. Se quiere modelar la difusión del calor en el interior de Ω si inicialmente la temperatura satisface $u(x,y,0) = 1$ en un cuadrado de 2 unidades de lado centrado en el interior de Ω y $u(x,y,0) = 0$ en el resto de Ω.

a) Escriba la ecuación diferencial que modela el fenómeno indicando las condiciones iniciales y de frontera.

b) Encuentre la solución en serie haciendo la sustitución $u(x,y,t) = e^{-\lambda t}\Phi(x,y)$.

c) Escriba la relación de ortogonalidad para las funciones $\Phi's$.

d) Encuentre los coeficientes de la solución en serie utilizando el inciso anterior y la condición inicial.

3.34 Considere la ecuación

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t} = \nabla^2 v, \qquad 0 \leq r < a, \qquad 0 < \theta < \pi, \quad t > 0,$$

$$v(r,0,t) = 0 = v(r,\pi,t), \quad 0 \leq r < a, \qquad v_r(a,\theta,t) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$v(r,\theta,0) = H(r,\theta), \quad v_t(r,\theta,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 < \theta < \pi.$$

a) ¿Qué modela esta ecuación? Haga un dibujo de la región estudiada indicando las condiciones dadas.

b) Haciendo $v(r,\theta,t) = T(t)\phi(r,\theta)$, encuentre las funciones propias $\phi(r,\theta)$ y sus correspondientes valores propios.

c) Encuentre la relación de ortogonalidad para las ϕ's.

d) Agregamos ahora un forzamiento $g(r,\theta,t)$ a la ecuación original, manteniendo las mismas condiciones iniciales y de frontera. Proponemos una solución para la ecuación forzada de la forma:

$$v(r,\theta,t) = \sum\sum \gamma(t)\phi(r,\theta),$$

para las ϕ's halladas en el inciso **b)**, donde la doble suma corre sobre los valores propios correspondientes. Encuentre la ecuación diferencial que satisfacen las $\gamma(t)$'s y su condición inicial.

3.35 Al estudiar la deformación de una columna elástica uniforme de longitud L y efuerzo axial P, se encuentra la ecuación:

$$y^{(4)} + \lambda y^{(2)} = 0, \qquad 0 < x < L, \quad \lambda = P/EI,$$

donde E =módulo de Young, I = momento de inercia de la sección transversal respecto a un eje que pasa por el centroide y es perpendicular al plano xy, $y(x)$ = desplazamiento transversal de la columna.

El menor valor propio λ_1 da el mínimo peso con que la columna se deforma y su correspondiente función propia $\phi_1(x)$ indica la forma que toma la columna deformada. Las condiciones de frontera señalan la configuración de los extremos de la columna.

Encuentre $\lambda_1, \phi_1(x)$ para las condiciones de frontera:

$$y(0) = y^{(2)}(0) = 0, \qquad y(L) = y^{(2)}(L) = 0.$$

Haga un dibujo de la columna deformada.

3.36 Resolver el problema:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{2L}\right), \quad u_t(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right).$$

Trate de resolver el mismo problema con la condición $u_t(x,0) = \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$.

3.37 Resuelva el siguiente problema no-homogéneo:

$$u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{senh}(x), \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0, \quad u(0,t) = u(L,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Hágalo por dos métodos distintos:

a) Resuelva el problema homogéneo para hallar los valores y funciones propias en x. Escriba la solución como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

donde X_n son las funciones propias en x y T_n son desconocidas. Ahora encuentre la serie de Fourier de $\operatorname{senh}(x)$ en términos de las X_n's, sustituya ambas series en la ecuación y use la ortogonalidad de las funciones propias.

b) Escriba la solución como $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ donde w satisface la ecuación estacionaria:

$$-w_{xx} = \operatorname{senh}(x), \quad w(0) = w(L) = 0,$$

y $v(x,t)$ satisface la ecuación homogénea

$$v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad v(x,0) = -w(x), \quad v_t(x,0) = 0.$$

c) ¿Se puede usar el método del inciso anterior en cualquier ecuación no-homogénea? Justifique.

3.38 Resolver el problema:

$$u_t = u_{xx}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad t > 0,$$

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t), \quad u(x,0) = f(x), \quad \text{con} \quad f \quad 2\pi - \text{periodica}.$$

Este problema describe el flujo de calor dentro de una barra de longitud 2π que tiene la forma de un anillo circular cerrado.

Sugerencia: suponga $X(x) = A\cos(\omega x) + B\operatorname{sen}(\omega x)$.

3.39 Hallar la distribución del potencial en la semi-franja $0 < x < \infty$, $0 < y < L$ con condiciones de frontera

$$u(x,0) = u_y(x,L) = 0, \quad u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0.$$

3.40 Hallar la solución de la siguiente ecuación de *Poisson*:

$$\Delta u = 1, \quad 0 < r < 1, \quad u(1,\theta) = \operatorname{sen}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

3.41 Se quiere modelar la difusión de calor en la profundidad de la tierra debida a la temperatura en la superficie terrestre. Supongamos que después de una profundidad $x = L$ bajo la tierra, deja de haber transferencia de calor vertical. Asuma también que las variaciones de temperatura en la superficie están dadas por la función $f(t)$. Entonces se puede plantear el problema, después de reescalar, como:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = f(t), \quad u_x(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$$

Resuelva.

Sugerencia: haga $v(x,t) = u(x,t) - f(t)$.

3.42 Hallar la distribución del potencial entre dos cilindros coaxiales de radios a y b, $a < b$, para el problema de *Dirichlet*:

$$u(a,\theta) = 0, \quad u(b,\theta) = Ab^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

3.43 La ecuación de Shrödinger en variables adimensionales está dada por:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla^2 \psi + V\psi,$$

donde ψ es la *función de onda* y V es el potencial, generalmente dado por una función $a(x)$.

Encuentre la *función de onda* para una partícula cuántica atrapada en un cubo unitario donde el potencial $a(x) \equiv 1$.

3.44 Hallar la solución de la ecuación de Helmholtz en el exterior de una esfera con condición de radiación de Sommerfeld, dada por:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad \pi/k \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

$$u\Big(\frac{\pi}{k}, \theta, \phi\Big) = 15, \quad \lim_{r \to \infty} r(u_r - iku) = 0.$$

3.45 Hallar la temperatura estacionaria en un cilindro de radio a, si la cara del cilindro está aislada, la base se mantiene a temperatura cero y la tapa a temperatura $F(r,\theta)$.

3.46 Resolver

$$y''(z) + (e^{2z} - \nu^2)y = 0.$$

Sugerencia: haga la sustitución $x = e^z$.

3.47 Resolver la ecuación de Laplace dentro de un cilindro circular, sujeta a las condiciones de contorno:

$$u(r,\theta,0) = \alpha(r) \operatorname{sen} 7\theta, \qquad u(r,\theta,H) = 0, \qquad u(a,\theta,z) = 0.$$

3.48 Resolver la ecuación de calor en un cuarto de círculo con condiciones de contorno tipo *Dirichlet* cero y condición inicial $u(r,\theta,0) = \Phi(r,\theta)$.

4. Sistemas Sturm-Liouville (S-L)

4.1 Diga en qué casos el problema Sturm-Liouville, con $r(x) = cte.$, y condiciones de frontera

$$u(L) + \alpha u(0) + \beta u'(0) = 0, \quad u'(L) + \gamma u(0) + \delta u'(0) = 0,$$

es autoadjunto.

4.2 Dado el problema de valores propios

$$y^{(4)} + \lambda e^x y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

Demostrar que $\lambda \leqslant 0$. Explicar el significado físico de este hecho. ¿Es $\lambda = 0$ un valor propio? Justifique su respuesta.

4.3 Considere la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial t}$$

con α, β y ρ funciones de x.

Demuestre que el método de separación de variables funciona sólo si $\beta = c\rho$ con $c = cte$. En este caso pruebe que la función espacial es una ecuación de S-L y escríbala en forma autoadjunta.

4.4 Considere el operador lineal de cuarto orden $L = d^4/dx^4$. Demustre que $uL[v] - vL[u]$ es una diferencial exacta. Utilice lo anterior para probar que si X_1, X_2 son funciones propias del problema $L[X] + \lambda X = 0$, $X(0) = X''(0) = 0$, $X(c) = X''(c) = 0$, correspondientes a dos valores propios distintos λ_1, λ_2, entonces X_1 es ortogonal a X_2 en el intervalo $(0, c)$.

4.5 Determine las funciones y valores propios del sistema S-L

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Con las condiciones de frontera:

a) $X(0) = 0, \qquad hX(1) + X'(1) = 0, \qquad h = cte., \qquad h < -1$

b) $X'(0) = 0, \qquad hX(c) + X'(c) = 0, \qquad h = cte., \qquad h > 0$

Diga cuál es la función de peso y en qué intervalo son ortogonales.

4.6 Escriba las siguientes ecuaciones en su forma autoadjunta.

a) $xu'' + (1 - x)u' + \lambda u = 0, \qquad 0 \leq x < \infty$ (Ec. de Laguerre)

b) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -1 \leq x \leq 1$ (Ec. de Legendre)

4.7 La ecuación de Hermite dada por:

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0$$

no es una ecuación S-L pues no es autoadjunta. Demuestre que haciendo la sustitución $y(x) = e^{-x^2/2}u(x)$ se obtiene una ecuación equivalente autoadjunta de S-L para la función de Hermite $y(x)$.

4.8 Sea $L = d^4/dx^4$, utilice los resultados del ejercicio **4.2** y resuelva:

a) Si u, v son funciones que satisfacen las condiciones de frontera:

$$\phi(0) = 0,\ \phi'(1) = 0,\ \phi''(0) = 0,\ \ \phi''(1) = 0 \qquad \Longrightarrow \int_0^1 [uL(v) - vL(u)]dx = 0$$

b) Para el problema de valores propios $L(\phi) + \lambda e^x \phi = 0$ con las condiciones de frontera dadas en **a)**, pruebe la ortogonalidad de las funciones propias. ¿Cuál es la función de peso?

c) Demuestre que los valores propios calculados en **b)** satisfacen $\lambda \leq 0$. ¿Es $\lambda = 0$ un valor propio?

4.9 Sea D el operador $Du = u'' + a(x)u' + b(x)u$ definido $\forall x \in I$, con $a(x), b(x) \in C^0(I)$. Las soluciones u_1 y u_2 de $Du = 0$ se llaman *"par fundamental"* si u_1, u_2 son linealmente independientes, i.e si el Wronskiano, $W(u_1, u_2) = u_1u_2' - u_2u_1' = 0$ en I.

Demuestre que para $Du_1 = Du_2 = 0$ y $W = W(u_1, u_2)$

$$W'(x) + a(x)W(x) = 0 \qquad en\ I$$

Sea $L(u) = (ru')' + qu$, el operador S-L, entonces si $L(u) = 0$ demuestre que:

$$r(x)W(x) = cte. \qquad en\ I$$

4.10 Considere la ecuación de S-L:

$$(rv')' - qv + \lambda pv = 0 \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{4.1}$$

Con r, r', p, q, continuas, $p, r > 0$.

Sea $x_0 \in [a, b]$, se define:

$$y = \int_{x_0}^{x} \sqrt{p(t)/r(t)}dt$$

La función y es estrictamente monótona por lo que existe la función inversa $x = \varphi(y)$.

En la ecuación (4.1) en lugar de v podemos definir:

$$\mu(y) = v(x)\sqrt[4]{p(x)r(x)} = v(\varphi(y))\sqrt[4]{p(\varphi(y))r(\varphi(y))}.$$

Demuestre que la ecuación (4.1) se transforma en:

$$\mu'' + (\lambda - Q(y))\mu = 0 \tag{4.2}$$

donde:

$$\mu' = \frac{du}{dy}; \qquad Q(y) = \frac{f''(y)}{f(y)} + \frac{q(\varphi(y))}{p(\varphi(y))}; \qquad f(y) = \sqrt[4]{p(\varphi(y))r(\varphi(y))}.$$

¿En qué se transforma el intervalo $[a,b]$?

4.11 La transformación dada en el ejercicio 4.1.10 se llama "Reducción de Liouville" y la ecuación (4.2) se denomina "Forma Normal de Liouville".

Utilice la reducción de Liouville en la ecuación de Bessel

$$(xu')' + (k^2x - \frac{n^2}{x})u = 0$$

y encuentre la forma normal de Liouville.

Repita el procedimiento para la forma autoadjunta de la ecuación de Hermite.

$$(e^{-x^2}u')' + \lambda e^{-x^2}u = 0$$

4.12 La ecuación diferencial que representa la variación en amplitud de las mareas en un canal, conforme varían la profundidad media y la anchura es:

$$\frac{q}{b}\frac{d}{dx}\left(hb\frac{d\eta}{dx}\right) + \sigma\eta = 0$$

donde η representa la caída y elevación de la marea, b el ancho y h la profundidad media de la sección del canal tomadas a una distancia x de la cabeza del canal, $2\pi/\sigma$ es el periodo de oscilación de la marea y g es la aceleración de la gravedad. Para el canal de Bristol en Inglaterra, dadas h_0 la profundidad promedio y b_0 el ancho de la sección a una distancia x_0 de la cabeza del canal, se consideran $q = 1$, $h = h_0x/x_0$, $b = b_0x/x_0$. Resuelva la ecuación para estos valores.

4.13 Encuentre las soluciones.

a) $xy'' + y = 0$.
b) $y'' + xy = 0$.
c) $\sqrt{x}y'' + y = 0$.
d) $y'' + \frac{1}{x}y' + 4(x^2 - \frac{n^2}{x^2})y = 0$.
e) $y'' + \frac{2n+1}{x}y' + y = 0$.
f) $y'' - xy = 0$.
g) $y'' - a^2x^{(2\alpha-2)}y = 0$.
h) $y'' + \left(e^{2z} - \nu^2\right)y = 0$. **Sugerencia:** haga $x = e^z$.

4.14 Encuentre la "Forma Normal" para las siguientes ecuaciones .

a) $xu'' + (1-x)u' + \lambda u = 0, \qquad 0 \le x < \infty$ (Ec. de Laguerre)
b) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -1 \le x \le 1$ (Ec. de Legendre) haga $x = -\cos(t)$

4.15 Sean $r(x)$, $p(x)$ funciones reales, $L(f) = (rf')' + pf$ un operador diferencial para $a \leqslant x \leqslant b$, con condiciones de frontera $f(b) = cf(a)$ y $f'(b) = c'f'(a)$. ¿Qué condiciones deben satisfacer c, c' (constantes) para que el operador L sea autoadjunto?

4.16 Encuentre los valores propios y funciones propias normalizadas para el problema:

$$f'' + \lambda f = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f'(1) = -f(1).$$

4.17 Encontrar los valores propios y las funciones propias normalizadas de:

$$(xf')' + \lambda x^{-1} f = 0, \qquad f(1) = f(b) = 0, \qquad b > 1.$$

Expanda la función $g(x) = 1$ en términos de estas funciones propias.
Sugerencia. Al calcular la integral haga la sustitución $y = \log x$.

4.18 Determine cuáles de los siguientes problemas de valores a la frontera son autoadjuntos.

a) $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0.$

4.19 Utilice el cociente de Rayleigh para hallar una cota superior del menor valor propio de:

a) $\varphi'' + (\lambda - x^2)\varphi = 0; \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 0.$

b) $\varphi'' + \lambda\varphi = 0; \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi' + \varphi(1) = 0.$

En el inciso **b)** calcule λ_1 usando una calculadora hasta dos o tres cifras significativas. Compare con el valor obtenido al usar el cociente de Rayleigh.

4.20 Considere el problema

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

a) Demostrar que el problema no es autoadjunto.

b) Demostrar, sin embrago, que todos los valores propios son reales.

4.21 Sean p, q y r funciones de clase $C^2[a, b]$ con $r > 0$. La ecuación

$$rf'' + qf' + pf + \lambda f = 0 \tag{4.3}$$

puede escribirse en la forma $L(f) + \lambda\omega f = 0$ multiplicando (4.3) por una función positiva arbitraria $\omega(x)$.

Demuestra que $\omega(x)$ siempre puede escogerse de manera que L resulte ser formalmente autoadjunto.

4.22 Las vibraciones transversales de una barra elástica uniforme dan lugar a la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1,$$

donde $y(x)$ es el desplazamiento transversal y $\lambda = m\omega^2/EI$, m es la masa por unidad de longitud, E el módulo de Young, I el momento de inercia respecto al eje por el centroide perpendicular al plano de vibración del corte y ω la frecuencia de vibración. Encuentre los modos normales y las frecuencias naturales de oscilación para los casos:

a) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = y'''(1) = 0.$

b) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0.$

4.23 Considere el problema de valores propios dado por:

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} + \lambda e^x \phi = 0, \quad \phi(0) = \phi(1) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(1) = 0.$$

a) Demostrar qué funciones propias correspondientes a distintos valores propios son ortogonales. ¿Cuál es la función de peso?

b) Demostrar que los valores propios satisfacen $\lambda \leq 0$. ¿Es $\lambda = 0$ un valor propio?

4.24 Pruebe que el operador Laplaciano $L\phi = \Delta\phi$ es *definido negativo* para condición de frontera tipo Neumann igual a cero en la frontera de un conjunto acotado Ω. Pruebe también que L es *autoadjunto* para dicha condición de frontera.
Sugerencia. Integre dos veces por partes vía la primera identidad de Green.

4.25 Los polinomios ultraesféricos $C_n^{(\alpha)}$ son soluciones de la ecuación:

$$(1 - x^2)y'' - (2\alpha + 1)xy' + n(n + 2\alpha)y = 0.$$

a) Transforme la ecuación en su forma autoadjunta.

b) Demuestre que para distintos valores de n, los $C_n^{(\alpha)}$ son ortogonales. Especifique la función de peso y el intervalo de integración.

4.26 Dada la ecuación de Tchebyshev de orden n

$$(1 - x^2)u'' - xu' + n^2 u = 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{4.4}$$

escriba la ecuación en su forma autoadjunta, diga cuál es la función de peso y escriba la relación de ortogonalidad de la funciones propias.

4.27 Considere el problema S-L

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0, \quad 0 < x < 1; \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{4.5}$$

¿Cuáles son los valores propios de esta ecuación?

Escriba el cociente de Rayleigh. Considerando el conjunto de funciones de prueba

$$\phi_\alpha(x) = x - x^\alpha, \qquad \alpha > 1.$$

Encuentre α que proporcione la mejor cota superior para el primer valor propio λ_1 de 4.5

4.28 Considere la ecuación general de segundo orden:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{4.6}$$

Se desea encontrar $\mu(x)$ tal que al multiplicarla por la ecuación ésta se pueda escribir como:

$$\big(\mu(x)P(x)y'\big)' + \mu(x)R(x)y = 0.$$

Demuestre que $\mu(x)$ es solución de (4.6) sí y sólo sí:

$$\mu' P(x) = \big(Q(x) - P'(x)\big)\mu. \tag{4.7}$$

a) Resuelva (4.7) y demuestre que:

$$\mu(x) = \frac{1}{P(x)} \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{P(s)} ds.$$

b) Utilice lo anterior para hallar la función de peso del problema de valores propios:

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

Escriba la relación de ortogonalidad de las funciones propias.

c) Haga lo mismo que en el inciso anterior para las siguientes ecuaciones:

Hermite:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad -\infty < x < \infty.$$

Laguerre:

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \qquad 0 \leqslant x < \infty.$$

Tchebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

5. Funciones de Bessel

5.1 Demuestre que:

$$\cos(x\,\mathrm{sen}(\phi)) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\phi); \qquad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia. Expanda $\cos(x\,\mathrm{sen}(\phi))$ con la serie coseno de Fourier para $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ y utilice la representación integral para $J_n(x)$.

5.2 Utilice la representación integral de J_n y el lema de Riemann-Lebesgue para probar:

$$\lim_{n\to\infty} nJ_n(x) = 0; \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

con x fija.

5.3 En el problema **5.1** utilice la identidad de Parseval y demuestre:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x\,\mathrm{sen}(\phi))d\phi = [J_0(x)]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n}(x)]^2; \qquad -\infty < x < \infty.$$

Expandiendo $f(\phi) = \mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}(\phi))$ en serie seno de Fourier en el intervalo $\phi \in (0, \pi)$ pruebe que:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(x\,\mathrm{sen}(\phi))d\phi = 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n-1}(x)]^2; \qquad -\infty < x < \infty.$$

Utilice lo anterior para probar que:

$$[J_0(x)]^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n}(x)]^2 = 1; \qquad -\infty < x < \infty.$$

De la última igualdad demuestre:

$$|J_0(x)| \leq 1; \qquad |J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad n = 1, 2, 3, ...; \qquad \forall x.$$

5.4 Evaluar la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} x^{-n} J_n(x)dx$$

5.5 Demuestre que:

a) $Y_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sen}(x)$

b) $Y_{\frac{1}{2}}(x) = J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(x)$

5.6 Demostrar la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}; \qquad a, b > 0.$$

5.7 Considere un cilindro acotado por $r = c$, $z = 0$ y $z = b$ donde (r, θ, z) son coordenadas cilíndricas. Encuentre la expansión en funciones propias de una función $V(r, z)$ que es armónica en el interior del cilindro y que satisfface:

$$V(c, z) = 0, \quad V(r, 0) = 0, \quad V(r, b) = f(r), \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant r \leqslant c, \quad 0 \leqslant z \leqslant b.$$

5.8 Verifique que $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen}\phi)d\phi$ satisface la ecuación de Bessel de orden $m = 0$.

5.9 Demuestre la desigualdad:

$$|J_n(z)| \leqslant \frac{|z/2|^n}{n!} \exp\left(\frac{|z|^2}{4(n+1)}\right)$$

5.10 Considere las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple cuya cuerda crece a razón constante b (Figura 5.1), en cada oscilación. Al tiempo $t = 0$ la cuerda mide a. Si r es la longitud de la cuerda al tiempo t, entonces $\dot{r}(t) = b$. Sea $\theta(t)$ el ángulo que forma la cuerda con la vertical.

a) Demuestre que para pequeñas oscilaciones, $\theta \approx 0$, la ecuación de movimiento está dada por:

$$(a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0$$

b) Demuestre también que mediante la traslación, $bx = a + bt$, esta ecuación se reduce a una ecuación de Bessel.

c) Encuentre la solución.

5.11 Para un péndulo simple cuya cuerda crece a razón constante b con longitud inicial a (Figura 5.1), su longitud al tiempo t es: $r = a + bt$. Si θ es el ángulo que hace con la vertical, la ecuación es:

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg \operatorname{sen}\theta$$

donde $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ es la aceleración transversal de la masa, perpendicular a la cuerda en la dirección de θ creciente.

Para pequeñas oscilaciones $\theta \approx \operatorname{sen}\theta$, la ecuación ecuación de movimiento se transforma en:

$$(a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0.$$

Haciendo la sustitución $bx = a + bt$, $k^2 = g/b$ encuentre la solución.

Verifique que la velocidad angular y la aceleración angular son: $-\frac{Ak}{x}J_2(2kx^{1/2})$, $\frac{Ak^2}{x^{3/2}}J_3(2kx^{1/2})$ respectivamente, con $A = cte$.

Entre dos posiciones consecutivas de equilibrio angular temporal hay un único instante de desplazamiento cero y recíprocamente. Interprete esto en términos

de las funciones de Bessel.

Se sabe que las gráficas de J_1, J_2, J_3 cruzan el eje x por arriba o por abajo en este orden. Además los ceros de cualquier par se entrelazan. En la ecuación de movimiento, si $\theta, \dot{\theta}$ ó $\ddot{\theta}$ son cero, las otras dos son de signo contrario (verificarlo). Pruebe con ayuda de un diagrama que ambas proposiciones se corroboran una a otra.

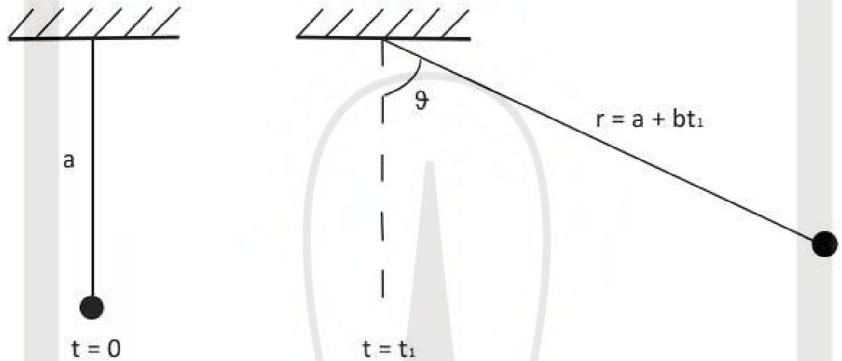

Figura 5.1. Péndulo simple cuya cuerda crece a razón constante b.

5.12 Demuestre que $J_n(\lambda_k x)$, λ_k k-ésimo cero de J_n, son ortogonales para toda $k > 0$ con función de peso $p(x) = x$. Note que n está fijo.

5.13 Demostrar que:

$$\int_0^a x J_0^2(kx)dx = \frac{1}{2}a^2\big(J_0^2(ka) + J_1^2(ka)\big).$$

5.14 Demuestre que:

$$J_{2n}(x) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2n\theta)\cos(x\cos\theta)d\theta.$$

5.15 Considere $w(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$.

Encuentre $w(x,t)$ derivando la expresión anterior respecto de x.

5.16 Demostrar que:

a) $\int x^{-n}J_{n+1}(x)dx = -x^{-n}J_n(x) + C$

b) $\int x^n Y_{n-1}(x)dx = x^n Y_n(x) + C$

5.17 Sea

$$\phi(u) = \begin{cases} (z^2 - u^2)^{-1/2}, & 0 < u < z, \\ 0, & z < u < \pi, \end{cases}$$

demostrar que la serie coseno de ϕ está dada por:

$$\phi(u) = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} J_0(nz)\cos(nu).$$

5.18 Encontrar la serie Fourier-Bessel de

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 2, \\ 0, & 2 < x < 4, \\ 1, & x = 2, \end{cases}$$

dado que $J_0(4\lambda) = 0$.

5.20 Justifique si se cumple o no la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dx}\Big[x^4 J_1(x^2)\Big] = 2x^5 J_0(x^2) + 3x^3 J_1(x^2).$$

5.21 Demuestre que:

a) $J_n'(r) + rJ_n''(r) = \dfrac{n^2}{r}J_n(r) - rJ_n(r)$. ¿Reconoce esta expresión?

b) $\displaystyle\int_0^c \Big[J_n(ar)\Big]^2 r dr = -c\frac{J_n(ac)}{2a}\Big[J_n'(ac) + acJ_n''(ac)\Big]$.
Siempre que $J_n'(ac) = 0$.

c) $\displaystyle\int_0^c \Big[J_n(ar)\Big]^2 r dr = \frac{a^2c^2 - n^2}{2a^2}\Big[J_n'(ac)\Big]^2$.
Utilice los resultados de los incisos anteriores y que $J_n(ac) = 0$.

5.22 Las ecuaciones que describen el desplazamiento vertical de una membrana circular que se encuentra fija en su frontera están dadas por:

$$\triangle u(r,\theta,t) = \frac{1}{c^2}u_{tt}(r,\theta,t), \quad 0 < r < a, \quad t > 0, \quad -\pi < \theta \leqslant \pi, \tag{5.1}$$

$$\begin{array}{lll} u(a,\theta,t) = 0, & -\pi < \theta < \pi, & t > 0, \\ u(r,-\pi,t) = u(r,\pi,t), & 0 < r < a, & t > 0, \\ u_\theta(r,-\pi,t) = u_\theta(r,\pi,t), & 0 < r < a, & t > 0, \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), & -\pi < \theta \leqslant \pi, & 0 < r < a, \\ u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta), & -\pi < \theta \leqslant \pi, & 0 < r < a, \end{array}$$

a) Suponga que la condición inicial para la posición, la función f, solo depende de r es decir: $u(r,\theta,0) = f(r)$ demuestre que la solución al problema está dada por:

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_i r)\cos(\alpha_i ct)}{[J_i(\alpha_i a)]^2}\int_0^a sf(s)J_0(\alpha_i s)ds, \quad t > 0,$$

donde α_i son los ceros positivos de $J_0(\alpha a) = 0$.

b) Si $u(r,\theta,0) = AJ_0(\alpha_k r)$, $A = cte.$, α_k raíz positiva de $J_0(\alpha a) = 0$, demuestre que:

$$u(r,t) = AJ_0(\alpha_k r)\cos(\alpha_k c t).$$

Observe que el desplazamiento es periódico en t con periodo común. Así es como la membrana da una nota musical.

5.23 Resuelva el problema de Dirichlet para $V = V(r,z)$ dado por:

$$\begin{aligned} \triangle V &= 0, \qquad r < 1, \qquad z > 0, \\ V(1,z) &= 0, \qquad \forall z > 0, \qquad V(r,0) = 1, \quad \forall r < 1, \end{aligned}$$

y V acotada en el dominio $r < 1$, $z > 0$.

5.24 Una membrana circular de radio a está sujeta en su borde y tiene un desplazamiento inicial

$$w(r,0) = w_0\big[J_0(\alpha_{01}\frac{r}{a}) - J_0(\alpha_{02}\frac{r}{a})\big]$$

y velocidad inicial cero, α_{0i} es el $i-$ésimo cero de J_0. Determine la energía cinética de la membrana para tiempos $t > 0$.

Sugerencia:

$$T = \frac{\rho}{2}\int w_t(r,t)^2 dA \quad \text{(Energía Cinética)}$$

5.25 Una membrana en forma de un cuarto de círculo de radio a está fija en su borde. Demostrar que su desplazamiento está dado por:

$$w(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{2m,n} J_{2m}(k_{2m,n} r)\operatorname{sen} 2m\theta \cos(k_{2m,n} t - \varphi_{2m,n})$$

donde $J_{2m}(k_{2m,n} a) = 0$.

5.26 Una cierta cantidad de lubricante está contenida en un balero plano a una presión $p(x,y)$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + x^3\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -1, \qquad 1 < x < 2, \qquad -1 < y < 1,$$

$$p(1,y) = p(2,y) = 0, \quad -1 < y < 1, \qquad p(x,-1) = p(x,1) = 0, \quad 1 < x < 2.$$

Resuelva haciendo $p(x,y) = v(x) + u(x,y)$, donde $v(x)$ y $u(x,y)$ satisfacen:

$$(x^3 v')' = -1, \quad 1 < x < 2, \quad v(1) = v(2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\frac{\partial u}{\partial x}\right) + x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 1 < x < 2, \quad -1 < y < 1,$$

$$u(1,y)=u(2,y)=0, \quad -1<y<1, \qquad u(x,-1)=u(x,1)=-v(x), \quad 1<x<2.$$

Encuentre la solución para u. Establezca la relación de ortogonalidad para las funciones propias de la variable x.

Sugerencia: utilizar las transformaciones para la ecuación de Bessel.

5.27 Encuentre la función generadora $w(z,t)$ de $I_n(z)$, es decir:

$$w(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)t^n.$$

Demostrar que:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{n-m}(z)J_m(z)=\begin{cases} \frac{z^n}{n!}, & n\geq 0,\\ 0, & n<0,\end{cases}$$

J_m es la función de Bessel de primera clase e I_k es la función modificada de Bessel de primera clase.

5.28 La ecuación modificada de Bessel de orden cero está dada por:

$$zK_0''(z)+K_0'(z)-zK_0(z)=0. \tag{5.2}$$

Por sustitución directa, demuestre que la representación integral de K_0, *función modificada de Bessel de orden cero*, dada por

$$K_0(z)=\int_0^{\infty} e^{-z\cosh u}du,$$

satisface la ecuación (5.2).

5.29 Utilizando la expresión integral para $J_n(x)$, la función de Bessel de primera clase de orden n, demuestre:

$$J_n'(x)=\frac{1}{2}\Big[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\Big].$$

5.30 Demostrar que la función esférica de Bessel

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y''+2xy'+(x^2-n(n+1))y=0.$$

5.31 Utilice la expansión asintótica de las $J_n's$ para demostrar la fórmula del Wronskiano

$$J_\nu(x)J_{-\nu-1}(x)+J_{-\nu}(x)J_{\nu+1}(x)=-\frac{2\operatorname{sen}\nu\pi}{\pi x}.$$

5.32 Las funciones esféricas modificadas de Bessel se definen como:

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x), \qquad k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Demostrar que: $i_0(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{x}$ y $k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

6. Funciones de Legendre

6.1 Sea D el interior de una esfera de radio R. Encuentre una función armónica en D si $u(R,\theta) = f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, donde

$$f(\theta) = \begin{cases} u_0, & 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta < \pi, \end{cases}$$

con u_0 constante.

Explique qué tipo de problema resuelve esta ecuación. ¿Se cumple que $u(r,0) = u(r,\pi)$ para $\alpha = \pi/2$? Justifique su respuesta.

6.2 Demuestre que la solución a la ecuación potencial en un cascarón esférico:

$$\nabla^2 u = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < \phi < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

$$u(a,\theta,\phi) = f(\cos\phi), \quad u(b,\theta,\phi) = 0, \quad 0 < \phi < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

está dada por :

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\phi),$$

encuentre la expresión para A_n.

6.3 Expanda x^2, x^3 y x^4 en series de polinomios de Legendre (no es necesario hacer cálculos).

6.4 Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Expanda f como serie de polinomios de Legendre.
Sugerencia: use las propiedades de los polinomios. Puede dejar la respuesta en términos de los números $P_n(0)$.

6.5 Resolver el siguiente problema de Dirichlet.

$$\triangle u(r,\theta,\phi) = 0 \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant r < 1,$$

$$u(1,\theta,\phi) = \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad u(1,\theta,\phi) = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

6.6 Demostrar:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_n^m(x)dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \Big[P_n^m(x)\Big]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

con $m = 0, 1, 2, ...,$ $l = m, m+1, ...$ y $n = m, m+1, ...$

6.7 Demuestre que para $|t|$ suficientemente chico

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n = (1-t^2)(1-2xt+t^2)^{-3/2}$$

6.8 Pruebe el siguiente resultado:

$\{P_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{P_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ son bases ortogonales para $L^2(0,1)$.

La norma de P_k en $L^2(0,1)$ es $(2k+1)^{-1/2}$.

6.9 Demuestre que los polinomios de Legendre cumplen la siguiente relación.

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(xP_n(x)) = (n+1)\frac{d^nP_n}{dx^n} = (n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

6.10 **SIN CALCULAR** demostrar que:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x[P_n(x)]^2 dx = 0$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \text{si} \quad |n-m| > 1$

6.11 Suponga que la temperatura inicial en una esfera sólida, $r \leqslant 1$, está dada por $f(\cos\theta)$ y es independiente de r y ϕ. Si $k = 1$ (conductividad), la temperatura $u(r,\theta,t)$ satisface la ecuación de calor:

$$r^2\frac{\partial u}{\partial t} = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big), \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad t > 0.$$

Si $u(1,\theta,t) = 0$, separe variables en u y verifique que la función propia general para u está dada por:

$$u_{n,j}(r,\theta,t) = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_j r)P_n(\cos\theta)e^{-\mu_j^2 t}$$

donde $J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_j) = 0$, $j = 1, 2, 3, ...,$ $\mu_j > 0$, y P_n es el polinomio de Legendre de grado n.

6.12 Demuestre

$$\int P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\big[P_{n+1} - P_{n-1}(x)\big] + cte.$$

6.13 Sea $\left\{g_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ tales que $g_n(1)=1$ $\forall n$, y además

$$(g_n, g_n) = \int_{-1}^{1} g_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \forall n.$$

Demuestre que $g_n(x) = P_n(x)$, con P_n polinomio de Legendre de grado n. Generalice su resultado.

6.15 Demuestre que los polinomios de Legendre satisfacen $P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo n.

6.16 Dada

$$f(x,a) = \int_0^a \frac{\xi^{m-1} d\xi}{(1-2x\xi+\xi^2)^{1/2}}, \quad m>1, \quad m \in \mathbf{Z},$$

demostrar

$$\int_{-1}^{1} f(x,a) P_n(x) dx = \frac{2a^{n+m}}{(n+m)(2n+1)}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

6.17 Considere una cáscara esférica con centro en el origen de radio interior a y radio exterior b. La esfera interior está aislada y en la exterior la temperatura está dada por:

$$u(b,\theta,t) = u_0 \operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 \le \theta < \pi.$$

a) Escriba la ecuación diferencial parcial que modela la difusión de calor en la cáscara.

b) Resuelva la ecuación para la temperatura estacionaria.

c) Demuestre que el flujo de calor J que sale del polo norte es:

$$J = -\kappa u_r(b,0) = \frac{4\kappa u_0}{b} \frac{a^5+b^5}{2a^5+3b^5} \qquad \text{con } \kappa \text{ la conductividad en la cáscara.}$$

6.18 Si $u(r,\theta)$ es la temperatura estacionaria de una esfera hueca con $a \le r \le b, 0 \le \theta \le \pi$ y $u(a,\theta) = f(\cos\theta)$, $u(b,\theta)=0$, derive la expresión:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta),$$

$P_n =$ polinomios de Legendre de grado n,

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \qquad n = 0,1,2,...$$

7. Otras Funciones Especiales

7.1 Considere la ecuación de Kummer:

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0$$

a) Si se realiza el cambio $a = \frac{1}{2}(1-p)$, $c = \frac{3}{2}$, $x = t^2$. $y(x) = t^{-1}u(t)$ demostrar que esto conduce a la ecuación de Hermite.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2t\frac{du}{dt} + 2pu = 0$$

b) Si $a = \nu + \frac{1}{2}$, $c = 2\nu + 1$, $x = 2it$, $y(x) = t^{-\nu}e^{it}u(t)$ demostrar que la ecuación de Kummer es equivalente a la ecuación de Bessel.

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)u = 0$$

c) Si $a = \frac{5}{6}$, $c = \frac{5}{3}$, $x = \frac{4}{3}t^{\frac{2}{3}}$, $y(x) = t^{-1}e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}}u(t)$ demostrar que la ecuación de Kummer se convierte en la ecuación de Airy.

$$\frac{d^2u}{dt^2} - tu = 0$$

7.2 La ecuación de Airy está dada por:

$$u''(z) - zu(z) = 0 \tag{7.1}$$

una de las soluciones se denota como $A_i(z)$ encuentre esta solución en términos de funciones de Bessel.

7.3 Demuestre que la función modificada de Bessel I_ν se puede representar como:

$$I_\nu(z) = \frac{1}{z}\int_0^\pi e^{z\cos t}\cos(\nu t)\,dt$$

viendo que satisface la ecuación directamente.

7.4 Los polinomios de Tchebyshev se definen como:

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Haciendo $x = \cos\theta$ y utilizando la fórmula de Moivre $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$, pruebe que $\cos(n\theta)$ es un polinomio de grado n en $\cos\theta$, por lo tanto $T_n(x)$ es un polinomio de grado n en x.

Utilice la formula de Moivre para dar la forma explícita de $T_0(x)$, $T_1(x)$ y $T_2(x)$.

7.5 Sea

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

el polinomio de Hermite de grado n. Demuestre por inducción que:

$$H_n(x) = n! \sum_{k \leqslant n/2} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}.$$

7.6 Sea

$$L_n^\alpha = \frac{x^{-\alpha e^x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x} \right), \qquad \alpha > -1$$

el polinomio de Laguerre de grado n, demostrar que:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+\alpha)(n-1+\alpha)...(k+1-\alpha)}{k!(n-k)!} (-x)^k.$$

Use este resultado y el del ejercicio **7.5** para probar:

$$L_n^{-1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}), \qquad L_n^{1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

7.7 La ecuación de Hermite aparece cuando se trabajan problemas con valores a la frontera en coordenadas parabólicas (s, t) dadas por:

$$x = s^2 - t^2, \quad y = 2st, \quad -\infty < s < \infty, \quad t \geqslant 0.$$

Las curvas $s = cte.$, $t = cte.$ son las parábolas

$$x^2 = c^2 - \left(\frac{y}{2c}\right)^2, \qquad x^2 = \left(\frac{y}{2c}\right)^2 - c^2, \quad c = cte.,$$

mostradas en la Figura 7.1.

El Laplaciano en coordenadas parabólicas en $\mathbb{R}^3$ está dado por:

$$\nabla^2 u(s, t, z) = \frac{1}{4(s^2 + t^2)} (u_{ss} + u_{tt}) + u_{zz}.$$

Encontrar la forma de la solución general de:

$$\nabla^2 u = 0$$

siguiendo los pasos sugeridos en los incisos **a)** a **d)**.

a) Separe variables tomando $u(s, t, z) = \Phi(s, t) Z(z)$ con constante de separación μ^2 y obtenga la solución en z.

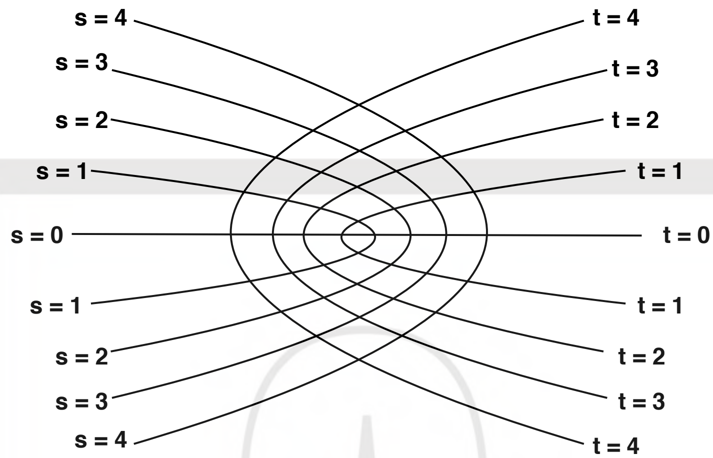

Figura 7.1. Parábolas $s = cte., t = cte.$

b) Separe s y t haciendo $\Phi(s,t) = S(s)T(t)$ con constante de separación λ y obtenga las ecuaciones para S y T.

c) Utilice el cambio de variables $S(s) = f(\sqrt{2\mu}s)$, $T(t) = g(i\sqrt{2\mu}t)$ y encuentre las ecuaciones para f y g.

d) Considere $\lambda = 2\mu(2n+1)$ resuelva para f y g, por último para S y T.

7.8 Utilice el ejercicio **7.7** para resolver el problema de *Dirichlet* en la región $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

$$\nabla^2 u(s,t,z) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < z < 1,$$

$$u(s,t,0) = u(s,t,1) = 0, \quad u(s,1,z) = f(s,z), \quad \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(s,z)\right|^2 ds dz < \infty.$$

Dibuje la región del problema indicando las condiciones de frontera. Indique en forma integral los coeficientes de la solución.

7.9 La ecuación *Hipergeométrica* está dada por:

$$x(1-x)y'' - \big[(1+a+b)x - c\big]y' - aby = 0,$$

determine sus puntos singulares regulares. Demuestre que si $a = -n$, $b = n+1$ y $c = 1$ la sustitución $x \longrightarrow \frac{1-z}{2}$ da lugar a la ecuación de Legendre:

$$(1-z^2)y'' - 2zy' + n(n+1)y = 0.$$

7.10 Una solución de la ecuación *Hipergeométrica* cuando $c \notin \mathbb{Z}^-$ es:

$$y_1(x) = F(a,b;c;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} x^k, \quad |x| < 1.$$

La otra solución está dada por:

$$y_2(x) = x^{1-c}F(1-c+a, 1-c+b; 2-c; x) = x^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-c+a)_k(1-c+b)_k}{k!(2-c)_k}x^k, \quad |x| < 1.$$

Utilice el ejercicio **7.9** para escribir la función de Legendre $P_\nu(x)$, $\nu \in \mathbb{R}$ (ó $\nu \in \mathbb{C}$) como una serie hipergeométrica F. La función P_ν satisface:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0.$$

7.11 Considere la función *hipergeométrica* F, definida como:

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)(\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\frac{x^n}{n!}$$

Pruebe que: $z^\alpha \mathrm{F}(a+\alpha, b+\alpha; \alpha-\beta+1; z)$ es solución de la ecuación (7.2).

$$z\Big(z\frac{d}{dz}+a\Big)\Big(z\frac{d}{dz}+b\Big)u - \Big(z\frac{d}{dz}-\alpha\Big)\Big(z\frac{d}{dz}-\beta\Big)u = 0 \tag{7.2}$$

7.12 Demuestre que:

$$(1+z)^n = \mathrm{F}(-n, \beta; \beta; -z)$$

7.13 Demuestre que:

$$\mathrm{F}(a, b+1; c; z) - \mathrm{F}(a, b; c; z) = \frac{az}{c}\mathrm{F}(a+1, b+1; c+1; z)$$

7.14 Pruebe que la ecuación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial t}$$

tiene soluciones del tipo

$$v = Ct_1^m \mathrm{F}_1(-m; 1/2; -x^2/4kt)$$

con m, C constantes.

7.15 Derivar la formula

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha \mathrm{F}(\alpha, \beta; \gamma; z)) = \alpha z^{\alpha-1}\mathrm{F}(\alpha+1, \beta; \gamma, z)$$

7.16 Sea $H_n(x)$ el polinomio de Hermite de grado n. Se sabe que

$$w(x,t) = (1-t^2)^{-1/2}e^{2x^2t/(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^2(x)}{2^n n!}t^n, \qquad |t| < 1.$$

Demostrar que:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)x^2dx = 2^n n!\sqrt{\pi}(n+1/2)$.

Para ello, multiplique w por una función $f(x)$ apropiada para cada caso. Después integre el lado izquierdo de $-\infty$ a ∞, lo que será función de t. Expándala en potencias de t e iguale los coeficientes de ambos lados.

7.17 Usando la función Gamma demuestre los siguientes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^4}dx = \left(\frac{1}{4}\right)!$

b) $\displaystyle\int_0^1 x^k \ln x dx = \frac{-1}{(k+1)^2}, \qquad k > -1.$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2s+1}e^{-ax^2}dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}.$

d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2s}e^{-ax^2}dx = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{(s-\frac{1}{2})!}{2a^{s+\frac{1}{2}}}.$

7.18

a) Demostrar:

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^pJ_p(bx)dx = \frac{(2b)^p\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(a^2+b^2)p+\frac{1}{2}}, \qquad p > -\frac{1}{2}, \quad a, b > 0,$$

J_p funciones de Bessel de primera clase.

Sugerencias:

i. Reemplace $J_p(bx)$ por su representación en serie para $p > 0$.

ii. Integre término a término.

iii. Utilice la fórmula de duplicación de Legendre dada por (7.3) y demuestre:

$$\frac{(-1)^k\Gamma(2k+2p+1)}{2^{2k+p}k!\Gamma(k+p+1)} = \frac{(-1)^k 2^p}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+k+\frac{1}{2})}{k!}$$

tome en cuenta: $\displaystyle\binom{-r}{k} = (-1)^k\binom{r+k-1}{k}.$

Reescriba la parte derecha en términos de coeficientes binomiales. Recuerde que la integral está en términos de $\Gamma(p+\frac{1}{2})$.

iv. Por último sume la serie binomial restante.

Fórmula de Duplicación de Legendre

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x) \tag{7.3}$$

b) Demuestre usando **a)** que la transformada de Laplace de $J_0(x)$ es:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)dx = \left(a^2+b^2\right)^{-1/2}, \qquad a,b>0.$$

7.19

a) Utilice coordenadas polares para demostrar que, si:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du; \quad x>0$$

$$\implies \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta d\theta, \quad x,y>0.$$

$B(x,y)$ es la función Beta.

b) Verifique que la función Beta cumple $B\left(\frac{1+p}{2}, \frac{1-p}{2}\right) = \pi \sec(\frac{p\pi}{2}), \quad 0<p<1.$

Utilice este resultado para demostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}, \qquad 0<p<1.$$

Sugerencia. Utilice la definición integral de Euler para la función Gamma.

7.20 Demuestre que la función Gamma puede escribirse como:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(xt - e^t\right) dt, \qquad x>0.$$

Sugerencia. Recuerde que Γ se define como:

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-y} y^{x-1} dy$$

7.21 Los polinomios de *Hermite* se definen como:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \qquad n=0,1,2,...$$

a) Calcule H_0, H_1, y H_2.

b) Se define la función generadora de los polinomios de Hermite como:

$$w(x,t) = \exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^\infty \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \qquad |t|<\infty \tag{7.4}$$

Pruebe este resultado y encuentre $H_n(0)$.

c) Derivando 7.4 respecto a x y t, pruebe las siguientes relaciones de recurrencia:

i. $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad n=1,2,...$

ii. $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n=1,2,...$

d) Con ayuda de las expresiones anteriores demuestre que $H_n(x)$ satisface la ecuación diferencial de Hermite.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

e) Por último, demuestre que $u_n(x) = \exp(\frac{-x^2}{2})H_n(x)$ es solución particular de:

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2)u_n = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Con esta ecuación pruebe que $(u_n, u_m) = 0$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)H_n(x)H_m(x)dx = 0, \qquad n \neq m.$$

Luego los H_n son ortogonales en el intervalo $(-\infty, \infty)$ con función de peso $\exp(-x^2)$.

7.22 Calcular $T_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ..$ (T_n polinomio de Tchebyshev de grado n). Utilice la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}}dx = 0, \qquad n \neq m.$$

7.23 En los polinomios de Tchebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $\quad n = 0, 1, 2, ...$ escriba $x = \cos\theta$, en la formula de Moivre,

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta,$$

utilice la expansión binomial en el lado izquierdo para probar que $\cos n\theta$ es un polinomio de grado n en $\cos\theta$, por lo que T_n es un polinomio de grado n en x.

7.24 Sea

$$\delta_n(x) = \frac{n}{2\cosh^2 nx},$$

demostrar que

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)dx = 1, \quad \forall n.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta_n(x)dx = \frac{1}{2}(1 + \tanh nx) = U_n(x)$

Por último pruebe que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{esta es la función de Heaviside.}$$

7.25 Verifique que

$$\delta(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

es una delta de *Dirac* probando que satisface la definición, i. e.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{im(x-\varphi_2)}dx = f(\varphi_2).$$

7.26 La función error está definida por:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{r^2}dr.$$

Demostrar:

a) $erf(-x) = -erf(x)$.

b) $\dfrac{d}{dx}erf = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-r^2}$.

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} erf(x) = 1$.

8. Transformada de Fourier

8.1 Utilizando el teorema del residuo calcule:

$$\hat{f}\left[\frac{1}{x^4+1}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-|\omega|/2} \left(\cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

8.2 Sea $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{-2x^2}$ calcular $f * g$.

8.3 Para $t > 0$ sea $f_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Demuestre que $f_t * f_b = f_{t+s}$.

8.4 Para $a > 0$ sea $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, $g_a(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\pi x}$, utilice la transformada de Fourier para demostrar.

a) $f_a * f_b = f_{a+b}$.

b) $g_a * g_b = g_{min(a,b)}$.

8.5 Considere la ecuación de onda para la cuerda infinita

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Utilice transformada de Fourier para deducir la bien conocida solución de *D'Alembert*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x-ct) + f(x+ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

8.6 Encuentre $\mathcal{F}[J_0(x)]$. **Sugerencia:** utilice la serie de J_0.

8.7 Resolver la ecuación de *Laplace*, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en la banda seminfinita, $0 < x < \infty$, $0 < y < 1$ con condiciones de frontera $u_x(0,y) = 0$, $u_y(x,0) = 0$ y $u(x,1) = e^{-x}$. Exprese su resultado como una integral de Fourier.

8.8 Considere la ecuación integral de *Fredholm*

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u) g(x-u) du,$$

donde las funciones f y g son dadas y se busca $y(x)$. Utilice la transformada de Fourier para demostrar que la solución está dada por:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{\hat{f}(\omega)}{1-\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

8.9 Resolver explícitamente la ecuación integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) f(u) du = \frac{1}{x^2+1}$$

$f(x)$ es la incógnita.

8.10 Si $f(x) = J_0(ax)$, demostrar que su transformada de Fourier es:

$$\hat{f} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(a^2 - \omega^2)^{-1/2}, & |\omega| < a, \\ 0, \quad |\omega| > a. \end{cases}$$

Sugerencia. Transforme la ecuación diferencial que satisface $J_0(z)$.

8.11 Resuelva la ecuación de *Helmholtz* utilizando transformada de Fourier.

$$\triangle u = u, \quad u = u(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad \forall x, \quad u(x, 1) = \exp(-\lambda x^2), \quad \lambda > 0.$$

Deje indicada la solución en forma integral.

9. Transformada Seno y Coseno de Fourier

9.1 Utilice la identidad de *Parseval* para calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx.$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha\omega)\operatorname{sen}(\beta\omega)}{\omega^2} d\omega.$

9.2 Encuentre la transformada seno de Fourier para:

a) $f(x) = xe^{-x}, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$

b) $g(x) = e^{-x}\cos x, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$

9.3 Hallar $f * g$ en cada caso:

a)

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0; \qquad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases} \qquad \text{Ambas son cero si } x < 0$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases} \qquad \text{Ambas son cero si } x < 0$$

9.4 Resolver:

$$u_t = u_{xx} + F(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,t) \quad \text{acotada.}$$

9.5 Resolver:

$$u_{xx} + u_{yy} - u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1, \quad u_y(x,0) = 0,$$

$$u(x,1) = e^{-x^2}, \quad u(x,y) \longmapsto 0 \quad \text{si } |x| \longmapsto \infty \text{ uniformemente en } y.$$

9.6 Evaluar la transformada seno y coseno de $f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$, en términos de la función *Gamma*, mediante integración en el plano complejo alrededor de la curva mostrada en la Figura 9.1.

9.7 Utilizando la representación integral

$$k_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\cosh u} du$$

encuentre la transformada coseno de Fourier de k_0, la función modificada de Bessel.

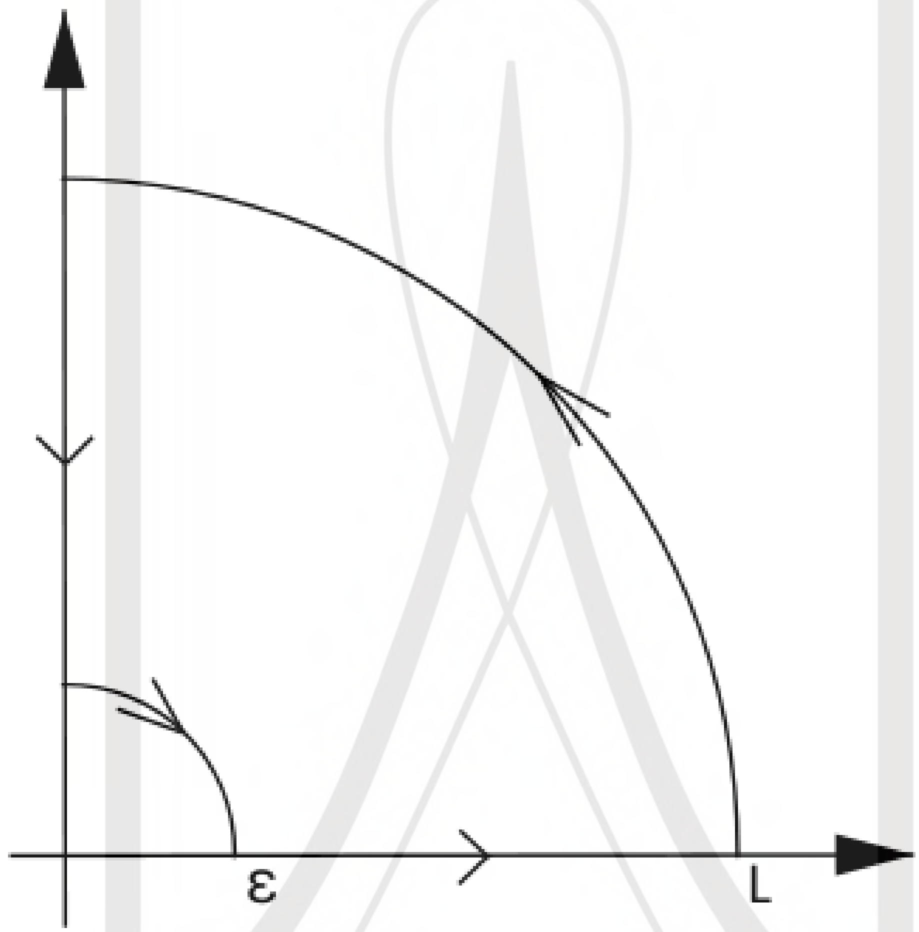

Figura 9.1. Curva de integración para el ejercicio **9.6**.

9.8 Demostrar que la transformada coseno de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} (1-t^2)^{\nu-1/2}, & t<1 \\ 0, & t>1 \end{cases} \qquad \nu > 0$$

está dada por:

$$\mathcal{F}_c[f] = 2^{\nu-1/2}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\omega^{-\nu}J_\nu(\omega).$$

10. Transformada de Laplace

10.1 Encontrar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $u(t) = \operatorname{senh} at$

b) $u(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-u) \operatorname{sen} u \, du$

c) $u(t) = e^{-bt} \cos at$

d) $u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \sigma; \\ -1, & \sigma < t < 2\sigma : \\ 0, & t > 2\sigma \end{cases}$

10.2 Encuentre la transformada inversa de Laplace por cualquier método.

a) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2 + A^2)^2}$

b) $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)^4}$

10.3 Utilice transformada de Laplace para resolver:

a) $u'' + 2u' + 5u = \delta(t - \pi), \quad u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + u = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant \pi; \\ \\ \cos t & \pi < t < \infty \end{cases}, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$

10.4 Resolver la ecuación integral de Volterra para la función $\phi(t)$ usando transformada de Laplace. Exprese su solución en términos de la transformada de $\phi(t)$.

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-s)\phi(s) ds = f(t), \qquad f, k \quad \text{funciones conocidas.}$$

10.5 Resolver utilizando transformada de Laplace.

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x, \quad u_x(0,t) - 3u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0.$$

10.6 Un contaminante se ha derramado en la superficie de la tierra. Suponiendo que el derrame está bien localizado, se ha observado que es espacialmente simétrico y la concentración u satisface la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \le r < \infty, \quad t > 0.$$

La variable r es la distancia radial dentro del suelo desde el punto de concentración del derrame y hay simetría azimutal. La concentración está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$u(r,0)=0; \qquad 2\pi\kappa r^2 u_r(r,t)\to -\gamma, r\to 0; \qquad u(r,t)\to 0, r\to\infty,$$

donde a es la difusividad, κ la permeabilidad de la tierra a este compuesto y γ es la razón de masa de contaminante que entra a la tierra.

Resuelva la ecuación utilizando transformada de Laplace $\mathcal{L}\{u(r,t)\}=U(r,s)$.

Sugerencia. Para resolver la ecuación para U, haga la sustitución $U(r,s)=V(r,s)/r$ y encuentre V. Recuerde que al integrar U las constantes de integración dependen de s. Seguramente necesitará la transformada dada por:

$$\mathcal{L}\left\{erfc\left(x/2\sqrt{t}\right)\right\}=e^{-x\sqrt{s}}/s.$$

10.8 Demostrar **UTILIZANDO UNICAMENTE TRANSFORMADA DE LAPLACE**.

a) Dada la función *Beta* definida como:

$$B(x,y)=\int_0^1 r^{x-1}(1-r)^{y-1}dr, \qquad x>0, \quad y>0,$$

probar

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

donde Γ es la conocida función Gamma.

b) Demostrar

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi t}.$$

10.9 Utilice transformada de Laplace para resolver:

a) $u''+2u'+5u=\delta(t-\pi), \quad u(0)=u'(0)=0.$

b) $u''+u=f(t),$ con $f(t)=0$ para $0\le t\le\pi,$ $f(t)=\cos t$ para $\pi<t<\infty, \quad u(0)=0,\ u'(0)=1.$

c) $u_t=4u_{xx}, \quad 0<x<1, \quad t>0, \quad u(x,0)=x, \quad u_x(0,t)-3u(0,t)=1, \quad u(1,t)=0.$

10.10 Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, si $F(s)=\frac{\tanh s}{s(s^2+1)}$, ¿cúanto valen $f(0)$ y $f'(0)$?

Calcular $h=f*g$ en cada caso:

a) $g(x)=x$ para $0\le x<1$

b) $g(x)=0,$ si $x>1$

10.11 Verifique que las ecuaciones de movimiento para el sistema mostrado en la Figura 10.1 son:

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) l_1 g \theta_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 g \theta_2 = 0$$

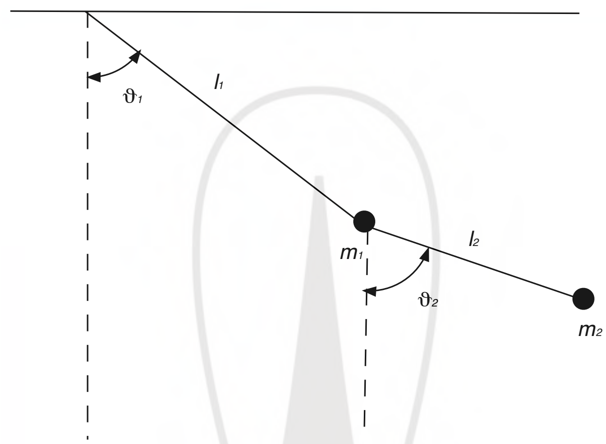

Figura 10.1. Sistema de dos péndulos.

Tome en cuenta las siguientes condiciones iniciales y resuelva utilizando transformada de Laplace:

$$\theta_1(0) = 1, \quad \theta_2(0) = -1; \qquad \dot{\theta}_1(0) = 0, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0.$$

10.12

a) Suponga que:

$$\mathcal{E} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \quad f \quad \text{es seccionalmente continua y de orden exponencial}\}$$

Sea $k \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{E}$ donde f', f'', ..., $f^{(n)} \in \mathcal{E}$. Además

$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0.$

Si

$$\mathcal{L}\{k(t)\} = \frac{1}{\sqrt{P(s)}}, \qquad P(s) = a_0 + a_1 s + ... + a_n s^n,$$

demuestre que la ecuación $u * k = f$ tiene como solución a $u = k * [P(D)f]$ donde

$$P(D)f = a_0 + a_1 f' + ... + a_{n-1} f^{(n-1)} + a_n f^{(n)}.$$

b) Calcule $\mathcal{L}\{erf(\sqrt{t})\}$ **SIN USAR TABLAS.**

c) Utilice los dos incisos anteriores para resolver:

$$\int_0^t u(t-\tau) erf(\sqrt{\tau}) d\tau = f(t), \qquad f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

11. Funciones de Green

11.1 Considere el problema:

$$y'' - sy = -f(x), \quad y'(0) + ky(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

a) Encuentre la función de *Green* y muestre gráficamente cuáles son los valores propios para $k < 0$ y $k > 0$. Diga si la función de *Green* presenta polos para los casos $k < 0$ y $k > 0$.

b) Encuentre la representación espectral para $k < 0$.

11.2 Considere el problema:

$$y'' - sy = -f(x), \quad y'(0) + ky(0) = 0, \quad y \to 0, \quad \text{si} \quad x \to -\infty.$$

a) Encuentre la función de *Green* del problema y demuestre usando la aproximación asintótica para $k \to \infty$, que si C es el círculo de radio R en el origen entonces

$$\oint_C G(x, \xi, s)ds \quad \longrightarrow \quad \text{Núcleo de Dirichlet.}$$

b) Diga si hay o no polos en G en los casos $k < 0$ y $k > 0$.

c) Encuentre la representación espectral para $k < 0$.

11.3 Suponiendo que se conoce la función de Green para la ecuación de Helmholtz,

$$\bigtriangledown^2 G + k^2 G = \delta(x - x', y - y') \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega,$$

dé una representación de la solución para la ecuación:

$$\bigtriangledown^2 u + k^2 u = F(x, y) \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = h(x, y) \quad \text{en} \quad \partial\Omega,$$

11.4 Explique detalladamente los pasos que seguiría para encontrar la función de Green del problema:

$$\bigtriangledown^2 G = \delta(x - x', y - y', z - z') \quad \text{en} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{semiespacio } z > 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

11.5 Considere

$$-y'' = f(x), \qquad y'(0) = y'(l) = 0$$

que tiene solución sólo si

$$\int_0^l f(x)dx = 0.$$

Establezca las condiciones que debe satisfacer $g(x, \xi)$ (función de Green). De lo anterior deduzca la imposibilidad de su existencia. Interpretando el problema como un problema de difusión de calor en una barra de longitud l, explique por qué no existe $g(x, \xi)$.

11.6 Encontrar la función de Green para:

$$\frac{d}{dx}\big((1+x)\frac{du}{dx}\big) = f(x) \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

11.7 Utilizando la función de Green encuentre la solución de:

$$\frac{d}{dx}\big(\frac{du}{dx}\big) + xu = f(x), \qquad 0 < a < x < b, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

11.8 Se considera una línea de fuentes paralelas al eje z que corta al plano xy en el punto $x = 0$, $y = \eta$.

Utilizando el método de imágenes, encuentre la función de Green, $g(x, y; 0, \eta)$ que satisface:

$$-\bigtriangledown^2 g = \delta(x)\delta(y-\eta), \qquad 0 < y, \quad \eta < a, \quad -\infty < x < \infty, \quad g|_{y=0} = 0, \quad g|_{y=a} = 0.$$

Sugerencia. Ponga cargas positivas en $y = \eta + 2na$, y cargas negativas en $y = -\eta - 2na,$, $n \in \mathbb{Z}^+$.